

ANALYYTTINEN MEKANIikka
763310A

Erkki Thuneberg

Luonnontieteellinen tiedekunta
Oulun yliopisto
2017

Järjestelyjä

Kurssin verkkosivu on

<https://noppa oulu.fi/noppa/kurssi/763310a>

Verkkosivulta löytyy luentomateriaali (tämä moniste), harjoitustehtävät ja myöhemmin myös harjoitustehtävien ratkaisut. Katso sieltä myös mahdolliset muutokset luento- ja harjoitusaikoihin.

Aikataulut 2017

Luennot: klo 10-12 päivinä ke 6.9., to 7.9. ja ke 13.9.-18.10., sali SÄ124
lisäksi ti 10-12 päivinä 31.10.-28.11., sali IT106 paitsi 28.11. sali IT113.

Harjoitukset (laskupäivä): to 10-12, sali MA335 päivinä 14.9.-19.10. ja 2.11.-7.12.

Tentti:

Harjoitusassistentti: Sami Laine

Kurssiin kuuluvat oleellisena osana laskuharjoitukset, joiden tehtävät laitetaan kurssin verkkosivulle pian vastaavan luennon jälkeen. Määräaikaan mennessä näytetyistä tehdyistä harjoituksista saa yhden arvosanapöytäkirjan korotuksen loppuarvosanaan. (Ei pisterajoja, jokainen tehtävä vaikuttaa paitsi että loppuarvosana pyöristetään kokonaisluvuksi.) Korostettakoon että nämä lisäpisteet ovat vain pieni lisä siihen hyötyyn, joka laskuharjoitusten tekemisestä on kurssin asian ymmärtämiselle ja siten tenttime- nestykselle.

Harjoitustehtäviä kannattaa yrittää laskea ensin itsenäisesti esim. kotona, sillä kahden tunnin laskupäivä on liian lyhyt kaiken alusta aloittamiseen.

1. Johdanto

Analyttinen mekaniikka tunnetaan myös nimellä klassinen mekaniikka tai teoreettinen mekaniikka. Siinä tutut Newtonin lait on puettu uuteen muotoon. Eri muotoja kutsutaan mm. Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikaksi. Uudessa muodossa mekaniikan lait voidaan helpommin yleistää koskemaan kaikkia fysikaalisia systeemejä. Seuraavassa muutamia yleistyksiä.

- jatkuvan aineen mekaniikka
 - hydrodynamiikka (nesteeet ja kaasut)
 - elastisuusteoria (kiinteät aineet)
- suuret hiukkasnopeudet, relativistinen teoria
- klassinen sähkömagneettinen kenttä
- kvanttimekaniikka (hiukkasille)
- kahden edellisen yhdistys: kvanttikenttäteoria

Tässä kurssissa mennään fysikaalisessa sisällössä Newtonin teorian ulkopuolelle ainoastaan käsittelemällä hiukkas- ta ulkoisessa sähkömagneettisessa kentässä. Kaikki muut yleistyksiset tehdään vasta myöhemmissä kursseissa, mm. klassinen kenttäteoria ja kvanttimekaniikan kurssit.

Matemaattisesti nähtynä analyttistä mekaniikkaa voi pitää vektorilaskennan, osittaisderivoiminnin ja variaatiolaskennan sovellutuksena.

Esitiedot

Fysiikan matematiikkaa ja mekaniikka (tai vastaavat tiedot)

Kirjoja

- M. Saarela, E. Suhonen ja V. Halonen: Analyttisen mekaniikan kurssi Osa I (1990). Moniste, jota on osittain käytetty tämän kurssin pohjana.
- A.L. Fetter ja J.D. Walecka, Theoretical mechanics of particles and continua (1980). Tämä on suositeltavin kirja. Vain yksi kappale on kirjastossa, mutta ostettavissa edullisesti verkosta.
- H. Goldstein, Classical Mechanics (1950, 1980). Hyvin yleisesti käytetty kirja aiemmin, luennot melko lähellä tätä, kirjastossa lukuisia kopioita saatavilla. Uusin painos (2000) sisältää myös kaaosteoriaa.
- L.D. Landau ja E.M. Lifshitz, Mechanics. Jokaisen teoreettisen fysiikan tulee tutustua Landaun ja Lifshitzin 10-osaiseen kirjasarjaan, jonka ensimmäinen osaa käsittelee klassista mekaniikkaa.
- J.B. Marion, Classical dynamics of particles and systems (1965).
- J.V. Jose ja E.J. Saletan, Classical dynamics (1998), käsittelee myös kaaosteoriaa.

sanastoa

nopeus = velocity
kiihtyvyys = acceleration
liikemäärä = momentum
voima = force
kulmaliikemäärä = angular momentum
kulmanopeus = angular velocity
työ = work
vääntömomentti = torque
sylinterikoordinaatisto = cylindrical coordinates
pallokoordinaatisto = spherical coordinates
häiriöteoria = perturbation theory

2. Newtonin mekaniikkaa

2.1 Liikkeyhtälöt

Tarkastellaan pistemäistä hiukkasta. Hiukkasen hetkelistä paikkaa kuvaa paikkavektori \mathbf{r} . Komponenttimuodossa

$$\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z, \quad (1)$$

missä \hat{x} , \hat{y} ja \hat{z} tarkoittavat koordinaattiakselien suuntaisia yksikkövektoreita. (Usein käytetään myös merkintöjä $\mathbf{i} = \hat{x}$, $\mathbf{j} = \hat{y}$ ja $\mathbf{k} = \hat{z}$. Lisää vektorien ominaisuuksia on käsitelty Liitteessä.) Nopeus \mathbf{v} on tämän derivaatta ajan t suhteen:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (2)$$

Komponenteittain tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (3)$$

Kiihtyvyys \mathbf{a} määritellään nopeuden aikaderivaattana:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (4)$$

Oletamme että Newtonin lait ovat voimassa:

N I: *Jos mikään voima ei vaikuta hiukkaseen niin se jatkaa liikettään vakionopeudella (tai pysyy paikallaan).*

N II: *Hiukkasen kiihtyvyys on suoraan verrannollinen hiukkaseen vaikuttavaan voimaan \mathbf{F} ja on voiman suuntainen. Kaavana*

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (5)$$

missä liikemäärä $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ja massa m on hiukkasesta riippuva vakio.

N III: *Jos hiukkanen vaikuttaa toiseen hiukkaseen jollakin tietyllä voimalla niin tämä toinen hiukkanen vaikuttaa ensimmäiseen hiukkaseen täsmälleen saman suuruisella mutta vastakkaisuuntaisella voimalla. Lisäksi voimat oletetaan hiukkasia yhdistävän janan suuntaisiksi.*

2.2 Hiukkasjoukko

Tarkastellaan N massapisteen $1, 2, \dots, N$ muodostamaa järjestelmää:

- hiukkasten massat m_1, m_2, \dots, m_N .
- hiukkasen j hiukkaseen k aiheuttama *sisäinen voima* $\mathbf{F}_{j \rightarrow k}$.
- hiukkaseen k vaikuttavat sisäiset (internal) voimat

$$\mathbf{F}_k^{(i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mathbf{F}_{j \rightarrow k}. \quad (6)$$

- hiukkaseen k vaikuttava *ulkoinen voima* (external force) $\mathbf{F}_k^{(e)}$.

Liikemäärän säilymlaki

Newtonin toisen lain avulla hiukkasen k liikeyhtälö on

$$\frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \mathbf{F}_k^{(i)} + \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (7)$$

Määritellään kokonaisliikemäärä \mathbf{P} summana yksittäisten hiukkasten liikemääristä. Siis

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k. \quad (8)$$

Sen aikaderivaatalle saadaan

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{(i)} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (9)$$

Newtonin kolmannen lain mukaan kahden hiukkasen väliset voimat toteuttavat ehdon

$$\mathbf{F}_{k \rightarrow j} = -\mathbf{F}_{j \rightarrow k}, \quad (10)$$

joten sisäisten voimien summa

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{(i)} = \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mathbf{F}_{j \rightarrow k} = 0, \quad (11)$$

sillä esim. termit $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ ja $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$, jotka molemmat esiintyvät summassa, kumoavat toisensa. Määritellään ulkoinen kokonaisvoima

$$\mathbf{F}^{(e)} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (12)$$

Tästä seuraa, että *hiukkassysteemin kokonaisliikemäärän \mathbf{P} aikaderivaatta on yhtä kuin ulkoinen voima $\mathbf{F}^{(e)}$* :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}}. \quad (13)$$

Tästä voimme lukea **liikemäärän säilymlain**: *jos systeemin ei vaikuta ulkoisia voimia (tai niiden summa $\mathbf{F}^{(e)}$ häviää), niin systeemin kokonaisliikemäärä on vakio.*

Määritellään systeemin

- massakeskipiste

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k}{\sum_{k=1}^N m_k}, \quad (14)$$

- kokonaisuudessa

$$M = \sum_{k=1}^N m_k. \quad (15)$$

Koska massat ovat vakioita, voidaan kokonaisliikemäärälle (8) kirjoittaa

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}. \quad (16)$$

Tätä käyttäen voidaan kaava (13) kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{F}^{(e)} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}. \quad (17)$$

Näemme, että systeemi liikkuu ikään kuin sen koko massa olisi keskittynyt massakeskipisteeseen, johon ulkoinen voima vaikuttaa.

Kulmaliikemäärän säilymlaki

Hiukkasjoukon kokonaiskulmaliikemäärä origon suhteen määritellään kaavalla

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k. \quad (18)$$

Derivoidaan \mathbf{L} ajan suhteen:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \times m_k \mathbf{v}_k + \mathbf{r}_k \times \frac{d\mathbf{p}_k}{dt} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(i)} + \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)}, \end{aligned} \quad (19)$$

missä on käytetty $\mathbf{v}_k \times \mathbf{v}_k = 0$. Ensimmäiselle termille saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(i)} &= \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{j \rightarrow k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{j \rightarrow k} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{j \rightarrow k}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{j \rightarrow k} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{k \rightarrow j}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{j \rightarrow k} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Tässä kolmas yhtäsuuruus on saatu vaihtamalla summausindeksien nimet jälkimmäisessä termissä, neljäs voiman ja vastavoiman laista (10) ja viimeinen siitä että keskinäinen voima $\mathbf{F}_{j \rightarrow k}$ ja hiukkasten yhdysvektori $\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j$ oletettiin yhdensuuntaisiksi.

Määritellään ulkoinen vääntömomentti

$$\mathbf{N}^{(e)} = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)}. \quad (21)$$

Näin saadaan

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(e)}}. \quad (22)$$

eli kulumaliikemäärän aikaderivaatta on yhtä kuin ulkoinen vääntömomentti. Tästä on luettavissa **kulumaliikemäärän säilymlaki**: Mikäli hiukkassysteemiin vaikuttava ulkoinen vääntömomentti jonkin pisteen suhteen on nolla, niin sen kulumaliikemäärä ko. pisteen suhteen säilyy.

(demonstraatio polkupyörän pyörällä)

Energian säilymlaki

Kun hiukkassysteemi siirtyy tilasta 1 tilaan 2, tekevät voimat työn W_{12} :

$$W_{12} = \sum_{k=1}^N \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k. \quad (23)$$

Ilmaistaan hiukkasten paikat $\mathbf{r}_k(t)$ parametrin t avulla, joka muuttuu arvosta t_1 tilassa 1 arvoon t_2 tilassa 2. Tehdään integraaliin (23) muuttujan vaihto

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k \cdot \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} dt. \quad (24)$$

Käyttäen liikeyhtälöä tämä integraali voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k &= \int_{t_1}^{t_2} m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} \cdot \mathbf{v}_k dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) dt = \int_{(1)}^{(2)} d \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) \\ &= \int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{2} m_k v_k^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Summaamalla yli hiukkasten saadaan siis

$$W_{12} = T_2 - T_1, \quad (26)$$

missä T on hiukkassysteemin kineettinen energia

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2. \quad (27)$$

Tutkitaan seuraavaksi, voidaanko W_{12} ilmaista myös voimien avulla.

Sanotaan, että voimakenttä $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ on konservatiivinen, jos sen tekemä työ on riippumaton kuljetusta tiestä. Tällöin voiman viivaintegraalin on hävittävä kaikille suljetuille poluille l :

$$\oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \forall l. \quad (28)$$

Stokesin lauseen mukaan on

$$\oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (29)$$

missä S on suljetun käyrän l rajoittama pinta. Tässä

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (30)$$

Jos nyt voimakenttä $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ on pyörteeton, ts.

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0, \quad (31)$$

niin se on konservatiivinen (ja kääntäen). Vektorilaskennasta tiedämme, että skalaarifunktion gradientti toteuttaa edellä olevan ehdon. Siis muotoa

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (32)$$

oleva voimakenttä on konservatiivinen. Skalaarifunktiota $V(\mathbf{r})$ kutsutaan *potentiaaliksi* tai *potentiaalienergiaksi*.

Hiukkassysteemissä työ jakaantuu ulkoisten ja sisäisten voimien tekemään työhön

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_{k=1}^N \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F}_k^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F}_{j \rightarrow k} \cdot d\mathbf{r}_k. \end{aligned}$$

Oletetaan, että ulkoiset voimat ovat konservatiivisia. Kirjoitetaan $\mathbf{F}_k^{(e)} = -\nabla_k U_k^{(e)}(\mathbf{r}_k)$, missä nablän alaindeksi k kertoo että se operoi \mathbf{r}_k :hon. (Potentiaalilla U on alaindeksi siltä varalta, että hiukkaseen kohdistuva voima riippuu hiukkasen paikan lisäksi hiukkasen tyypistä, esim. massasta tai sähkövarauksesta.) Ulkoisten voimien tekemälle työlle saadaan

$$\begin{aligned} W_{12}^{(e)} &= -\sum_{k=1}^N \int_{(1)}^{(2)} \nabla_k U_k^{(e)}(\mathbf{r}_k) \cdot d\mathbf{r}_k \\ &= -\sum_{k=1}^N \int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial z_k} dz_k \right) \\ &= -\sum_{k=1}^N \int_{(1)}^{(2)} dU_k^{(e)} = -\sum_{k=1}^N \int_{(1)}^{(2)} U_k^{(e)}(\mathbf{r}_k). \end{aligned} \quad (33)$$

Oletetaan, että myös sisäiset voimat ovat konservatiivisia. Tällä tarkoitetaan sitä, että jokaiselle hiukkasparille (j, k) , missä $j < k$, on olemassa potentiaali $U_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k)$ niin että

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{j \rightarrow k} &= -\nabla_k U_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) \\ \mathbf{F}_{k \rightarrow j} &= -\nabla_j U_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k). \end{aligned} \quad (34)$$

[Huomaa että voiman ja vastavoiman laista (10) seuraa että U_{jk} voi riippua vain erotuksesta $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$, $U_{jk}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)$, mutta tämä ei ole oleellista energian säilymisen kannalta.] Sisäisten voimien tekemäksi työksi saadaan

$$\begin{aligned} W_{12}^{(i)} &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{k-1} \int_{(1)}^{(2)} (\mathbf{F}_{j \rightarrow k} \cdot d\mathbf{r}_k + \mathbf{F}_{k \rightarrow j} \cdot d\mathbf{r}_j) \\ &= -\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{k-1} \int_{(1)}^{(2)} [\nabla_k U_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) \cdot d\mathbf{r}_k \\ &\quad + \nabla_j U_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) \cdot d\mathbf{r}_j] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{k-1} \int_{(1)}^{(2)} dU_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) \\
&= - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{k-1} \int_{(1)}^{(2)} U_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k). \quad (35)
\end{aligned}$$

Tässä kolmas yhtäsuuruus seuraa siitä että laskettaessa differentiaalia $dU_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k)$ pitää ottaa osittaisderivaatat kaikkien muuttujien $(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) = (x_j, y_j, z_j, x_k, y_k, z_k)$ suhteen, mikä vastaa juuri edellisessä muodossa olevia gradientteja muuttujien \mathbf{r}_j ja \mathbf{r}_k suhteen.

Määritellään kokonaispotentiaali (huomaa että kukin pari lasketaan vain kerran)

$$V = \sum_{k=1}^N U_k^{(e)}(\mathbf{r}_k) + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{k-1} U_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k). \quad (36)$$

Yhdistämällä kaavoista (26) ja (33)-(36) saadaan

$$W_{12} = T_2 - T_1 = -(V_2 - V_1). \quad (37)$$

Toisin sanoen, saamme **energian säilymislain**: jos hiukkasysteemiin vaikuttavat voimat ovat konservatiivisia, niin systeemin kokonaisenergia $T + V$ on vakio.

Edellä käsiteltiin liikemäärän, kulmaliikemäärän ja kokonaisenergian säilymislaite Newtonin mekaniikassa.

Jatkossa tässä kurssissa käsitellään kuinka nämä lait yleistetään koskemaan staattista magneettikenttää. Lisäksi muotoillaan mekaniikan teoria siten, että se on myöhemmin helpompi yleistää koskemaan relativistisia hiukkasia, kvanttimekaanisia hiukkasia, sekä yleistä sähkömagneettista kenttää.

2.3 Häiriöteoria

Mekaniikan ongelmien tarkka ratkaisu on monesti hankalaa, jopa mahdotonta. Usein riittävän tarkkaan ratkaisuun voidaan päästä käyttämällä yksinkertaisempaa *häiriölaskua*. Itse asiassa kysymys on vain ratkaisun kehittämistä Taylorin sarjaksi jonkun parametrin suhteen, ja laskea vain sarjan alimmat termit. Seuraava esimerkki havainnollistaa tätä hyvin yleistä menetelmää.

Esim. Tutkitaan ilmanvastuksen vaikutusta heittoliikkeeseen. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että vastusvoima on suoraan verrannollinen nopeuteen $\mathbf{F}_{\text{vastus}} = -k\mathbf{v}$. Liikkeyhtälö on

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\hat{\mathbf{y}} - k\dot{\mathbf{r}}, \quad (38)$$

missä aikaderivaattaa on merkitty pisteellä. Tämän ratkaisu on muotoa $\mathbf{r}(t, k)$. Olettaen, että ilmanvastus on suhteellisen pieni, on mahdollista kehittää $\mathbf{r}(t, k)$ Taylorin sarjaksi k :n suhteen:

$$\mathbf{r}(t, k) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots, \quad (39)$$

missä alaindeksi antaa termin kertaluvun k :ssa ($\mathbf{r}_i \propto k^i$). Sijoitetaan tämä liikkeyhtälöön (38). Tämän yhtälön tulee

toteutua kussakin k :n kertaluvussa erikseen. Nollannessa kertaluvussa saadaan

$$m\ddot{\mathbf{r}}_0 = -mg\hat{\mathbf{y}}. \quad (40)$$

Tämä on heittoliikkeen yhtälö ilman ilmanvastusta. Se voidaan integroida, jolloin saadaan sopivilla alkuehdoilla (alkunopeus \mathbf{V})

$$x_0(t) = V_x t, \quad y_0(t) = V_y t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (41)$$

Kokoamalla yhtälön (38) ensimmäisen kertaluvun termit saadaan yhtälö

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1 = -k\dot{\mathbf{r}}_0. \quad (42)$$

Tätä integroimalla saadaan korjaukset

$$x_1(t) = -\frac{k}{2m}V_x t^2, \quad y_1(t) = -\frac{k}{m}\left(\frac{1}{2}V_y t^2 - \frac{1}{6}gt^3\right). \quad (43)$$

Tästä voidaan päätellä, että kappale osuu maahan ($y = 0$) hetkellä

$$t = \frac{2V_y}{g} - \frac{2kV_y^2}{3mg^2} + \dots \quad (44)$$

ja heiton pituus

$$x = \frac{2V_x V_y}{g} - \frac{8kV_x V_y^2}{3mg^2} + \dots \quad (45)$$

Nämä kaikki siis sarjakehitelminä k :n suhteen. Laske välivaiheet harjoitustehtävänä.

3. Lagrangen mekaniikkaa

3.1 Yleistetyt koordinaatit

Newtonin mekaniikassa käytetään hiukkasten paikkojen ilmaisemiseen paikkavektoreita \mathbf{r}_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Useissa tapauksissa on sen sijaan hyödyllistä käyttää *yleistettyjä koordinaatteja* q_i , $i = 1, 2, \dots, 3N$:

$$q_i = q_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (46)$$

tai

$$q_i = q_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; t) \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (47)$$

Yleistetyt koordinaatit siis riippuvat sekä hiukkasten paikkakoordinaateista, että mahdollisesti ajasta. Systeemissä oletetaan olevan N kappaletta hiukkasia ja jokaiseen hiukkaseen liittyy 3 paikkakoordinaattia. Jotta yleistetyt koordinaatit kuvaisivat systeemin tilan täydellisesti, täytyy niitakin olla $3N$ kappaletta.

Ainoa vaatimus paikka- ja yleistettyjen koordinaattien välillä on, että niillä on yksi yhteen vastaavuus (ainakin jossain määrittelyalueessa). Toisin sanoen vaaditaan, että Jacobin determinantti $D \neq 0$, eli

$$D = \frac{\partial(q_1, \dots, q_{3N})}{\partial(x_1, \dots, z_N)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_1}{\partial z_N} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial z_N} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (48)$$

Tällöin käänteismuunnos

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, \dots, q_{3N}; t) \quad k = 1, \dots, N. \quad (49)$$

voidaan laskea.

Yleistetyt koordinaatit ovat hyödyllisiä mm. seuraavissa tapauksissa.

- Voimakentällä on jokin symmetria, esim. sylinterisymmetria. Tällöin on järkevää käyttää sylinterikoordinaatteja ρ , ϕ ja z :

$$\mathbf{r} = \hat{x}\rho \cos \phi + \hat{y}\rho \sin \phi + \hat{z}z. \quad (50)$$

- Liike on rajattu, esim. kuula vierii (hitaasti) pinnalla. Tällöin tarvitaan vain yleistetyt koordinaatit, jotka kuvaavat paikkaa pinnalla, ja hiukkasen kolmas yleistetty koordinaatti voidaan jättää tarpeettomana pois.

Katsotaan muutamia muunnoksen

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, \dots, q_{3N}; t) \quad (51)$$

seuraamuksia. Hiukkasjoukon liikettä kuvaavat nyt yleistetyt koordinaatit jotka ovat ajan funktioita, $q_i(t)$. Käytetään aikaderivaatan lyhennysmerkkinä pistettä,

$$\frac{df}{dt} \equiv \dot{f} \quad (52)$$

mille tahansa ajan funktiolle $f(t)$. Erityisesti siis

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i. \quad (53)$$

Määritelmän mukaan nopeudelle saadaan

$$\mathbf{v}_k = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}. \quad (54)$$

Tästä nähdään että \mathbf{v}_k riippuu myös yleistettyjen koordinaattien aikaderivaatoista \dot{q}_i . Täten \mathbf{v}_k :n komponentit on seuraavaa muotoa olevia funktiota

$$f(q_1, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}; t). \quad (55)$$

Jatkossa tarkastellaan paljon funktioita, jotka ovat tätä samaa muotoa. Näille määritellään osittaisderivaatat

$$\frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} \quad (i = 1, \dots, 3N) \quad (56)$$

käsittelemällä muuttujia q_i , \dot{q}_i ja t toisistaan riippumattomina.

Myös \mathbf{r}_k (51) on tyyppiä (55) oleva funktio, mutta

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (57)$$

koska \mathbf{r}_k ei riipu \dot{q}_i :stä.

Lasketaan osittaisderivaatta $\partial \mathbf{v}_k / \partial \dot{q}_i$. Kaavasta (54) saadaan

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \right). \quad (58)$$

Huomaa että summausindeksi on vaihdettu j :ksi, jotta i ei esiintyisi kahdessa eri merkityksessä. Koska \mathbf{r}_k ja siten $\partial \mathbf{r}_k / \partial q_i$ ja $\partial \mathbf{r}_k / \partial t$ ovat riippumattomia \dot{q}_i :stä, saadaan

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i}. \quad (59)$$

Koska \dot{q}_i ja \dot{q}_j käsitellään osittaisderivoinneissa toisistaan riippumattomia lukuun ottamatta tapausta $i = j$, pätee

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i} = \delta_{ij}, \quad (60)$$

missä on käytetty Kroneckerin deltaa,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kun } i = j \\ 0 & \text{kun } i \neq j. \end{cases} \quad (61)$$

Siten saadaan

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}, \quad (62)$$

mitä kohta tullaan käyttämään.

Kaava (62) voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \quad (63)$$

Voidaan huomata, että vasemmalla puolella olevien derivoitien järjestys on oleellinen, sillä \mathbf{r}_k ei riipu ollenkaan \dot{q}_i :stä. Osoitetaan, että derivoitien järjestys voidaan kuitenkin muuttaa lausekkeessa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \quad (64)$$

Koska

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_{3N}; t) \quad (65)$$

niin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} &= \sum_j \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial t \partial q_i} \\ &= \sum_j \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (66)$$

sillä osittaisderivoitien järjestys voidaan aina vaihtaa ja \dot{q}_j ja q_i tulkitaan osittaisderivoinnissa toisistaan riippumattomiksi.

3.2 Lagrangen yhtälöt

Ns. Lagrangen yhtälössä Newtonin liikeyhtälö on kirjoitetaan yleistettyjen koordinaattien avulla. Seuraavassa johdetaan Lagrangen yhtälöt lähtien Newtonin liikeyhtälöistä

$$\frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \mathbf{F}_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (67)$$

Kerrotaan molemmat puolet pistetulona $\partial \mathbf{r}_k / \partial q_i$:lla ja summataan k :n yli:

$$\sum_k \frac{d\mathbf{p}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (68)$$

Yksinkertaisuuden vuoksi summausraajat ($k = 1, \dots, N$) on jätetty merkitsemättä. Huomaa, että yhtälöryhmät (67) ja (68) ovat täysin ekvivalentteja koska muunnos \mathbf{r}_k :n ja q_i :n välillä on yksi yhteen. Määritellään oikean puolen suure yleistetyksi voimaksi Q_i :

$$Q_i \equiv \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \quad (69)$$

Muokataan (68) vasemmalla puolella olevaa termiä:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{p}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) - \mathbf{p}_k \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \\ &= \frac{d}{dt} \left(m_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - m_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_i} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right), \end{aligned} \quad (70)$$

missä toisella rivillä käytettiin tuloksia (62), (66) ja $\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{v}_k$. Näin ollen voidaan (68) kirjoittaa

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i. \quad (71)$$

missä T on kineettinen energia. Tätä kutsutaan Lagrangen yhtälöksi. Useimmiten nimeä Lagrangen yhtälö kuitenkin käytetään siitä erikoistapauksesta, jossa voimat ovat konservatiivisia, ja joka seuraavaksi muotoillaan.

Konservatiiviselle voimalle

$$\mathbf{F}_k = -\nabla_k V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t). \quad (72)$$

Tällöin yleistetty voima

$$\begin{aligned} Q_i &\equiv \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = - \sum_k \nabla_k V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \\ &= - \sum_k \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \\ &= - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (73)$$

Ts. yleistetty voima saadaan suoraan derivoimalla potentiaalia, kun se on ilmaistu yleistettyjen koordinaattien funktiona:

$$V = V(q_1, \dots, q_{3N}; t). \quad (74)$$

Koska V ei tässä riipu \dot{q}_i :stä, voidaan (73) aivan yhtä hyvin kirjoittaa

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right). \quad (75)$$

Näin saadaan kaavasta (71) konservatiivisille systeemeille *Lagrangen liikeyhtälö*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 3N,} \quad (76)$$

missä $L = T - V$ on *Lagrangen funktio*. Se on muotoa $L = L(q_1, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}; t)$.

Mitä on tapahtunut

siirryttäessä Newtonin yhtälöistä

$$\frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \mathbf{F}_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (67)$$

Lagrangen yhtälöihin

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 3N? \quad (76)$$

- Yleistetyt koordinaatit voidaan valita edullisemmin kuin vektorit.
- Skalaariyhtälö (L ei muutu koordinaattimuunnoksessa, vain sen riippuvuus koordinaateista).
- Liikkeen rajoitusehdot helpompi ottaa huomioon.
- Helpompi yleistettävyyys (esim. q_i voi olla magneettikentän voimakkuus)
- toimii myös nopeudesta riippuvalle potentiaalille $V(q_1, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}; t)$ jos vain yhtälö (75) on voimassa.

- Rajoitus: vain konservatiiviset systeemit (kitka ei sallittu)
- Vaatimus: osattava lausua $L = T - V$ yleistettyjen koordinaattien avulla.

Erityisesti kineettinen energia on lausuttava

$$T = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \sum_k \frac{1}{2} m_k \left(\sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \right)^2, \quad (77)$$

missä toinen potenssi on ymmärrettävä pistetulona. Tästä seuraa, että T on muotoa

$$T = a + \sum_i a_i \dot{q}_i + \sum_i \sum_j a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (78)$$

missä a , a_i ja a_{ij} ovat funktioita jotka riippuvat muuttujista q_i ($i = 1, \dots, 3N$) ja t .

Esimerkkejä

Esim. 1. *Yksi hiukkanen karteesisissa koordinaateissa*

On hyvä tutkia myös tämä yksinkertainen tapaus, jossa yleistetyt koordinaatit ovat tutut $q_1 \equiv x$, $q_2 \equiv y$ ja $q_3 \equiv z$. Tällöin $V = V(x, y, z)$ ja

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (79)$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z). \quad (80)$$

Lagrangen yhtälö (76) antaa

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (81)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} (m\dot{y}) + \frac{\partial V}{\partial y} \quad (82)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} (m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (83)$$

Tuloksena on (niin kuin pitääkin) tutut Newtonin yhtälöt:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (84)$$

Esim. 2. *Yksi hiukkanen napakoordinaateissa*

Napakoordinaatit x - y -tasossa määrittelee yhtälö

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}} r \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} r \sin \phi. \quad (85)$$

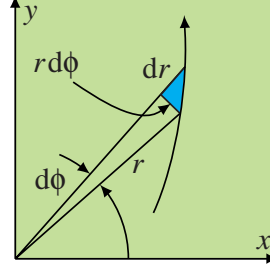
Yleistetyt koordinaatit ovat nyt $q_1 \equiv r$ ja $q_2 \equiv \phi$. Tällöin $V = V(r, \phi)$. Kineettisen energian laskemiseksi tarvitaan

$$\dot{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} (\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) + \hat{\mathbf{y}} (\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi). \quad (86)$$

Kineettiselle energialle saadaan tästä

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2). \quad (87)$$

Tässä osuus $\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2$ tulee radiaalisesta liikkeestä ja $\frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2$ kulmaliikkeestä.



Lagrangen funktio on siis

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r, \phi). \quad (88)$$

Osittaisderivaatoille saadaan

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (89)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (90)$$

Lagrangen yhtälöt ovat siis

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) = m r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (91)$$

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\phi}) = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (92)$$

Tulkinta: Yhtälössä (92) $m r^2 \dot{\phi} = m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})_z = L_z$ on kulmaliikemäärän z -komponentti, kuten voidaan todeta pienellä laskulla. Oikealla puolella esiintyvä suure on taas yleistetyin voiman määritelmän mukaan

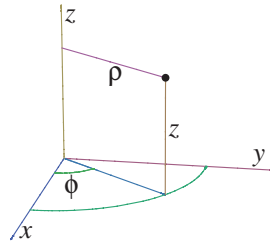
$$-\frac{\partial V}{\partial \phi} = Q_\phi = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \mathbf{F} \cdot r \hat{\phi} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z = N_z, \quad (93)$$

missä $\hat{\phi} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi$ on yksikkövektori atsimuuttisuuntaan. Ts. (92) voidaan kirjoittaa $\dot{L}_z = N_z$, joka on erikoistapaus aiemmin johdetusta yhtälöstä (22). Yhtälö (91) voidaan kirjoittaa

$$m\ddot{r} - m r \dot{\phi}^2 = Q_r = F_r, \quad (94)$$

missä $-r \dot{\phi}^2 = -v_\phi^2/r$ on ympyräliikkeen keskeiskiihtyvyys. Harjoitus: laske läpi esimerkin kaikki välivaiheet.

Vastaavalla tavalla kuin tässä esimerkissä voidaan johdattaa hiukkasen kineettisen energian lauseke sylinteri- ja pallokoordinaateissa.

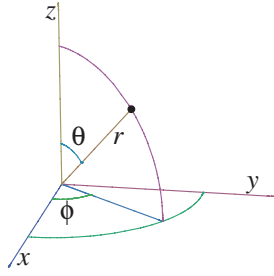


Sylinterikoordinaateissa (ρ, ϕ, z) , joissa

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}} \rho \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \rho \sin \phi + z \hat{\mathbf{z}}, \quad (95)$$

saadaan tulokseksi

$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 \right). \quad (96)$$



Pallokoordinaateissa (r, θ, ϕ) , joissa

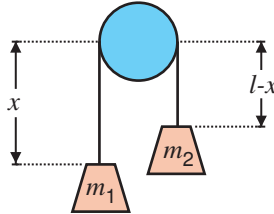
$$\mathbf{r} = r(\hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi) \sin \theta + \hat{\mathbf{z}} r \cos \theta, \quad (97)$$

saadaan tulokseksi

$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right). \quad (98)$$

Usein esiintyviä potentiaaleja ovat seuraavat: (a) kappaleen potentiaalienergia vakiossa gravitaationkentässä $V = mgh$, missä g on gravitaatiokiihtyvyys, m kappaleen massa ja h korkeus jolla kappale on, ja (b) venytetyn jousen potentiaalienergia $V = \frac{1}{2}ks^2$, missä s on jousen pituuden muutos sen lepopituudesta ja k jousivakio (harjoitus).

Esim. 3. Atwoodin pudotuskoe



Kahta punnusta yhdistävä venymätön naru liukuu kitkatta kiinteällä pyörällä. Tämä on esimerkki järjestelmästä, jossa rajoitusehtojen vaikutuksesta on vain yksi oleellinen koordinaatti x . Tälle saadaan

$$V = -m_1gx - m_2g(l - x), \quad T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2, \quad (99)$$

joten

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_1gx + m_2g(l - x). \quad (100)$$

Tästä saadaan

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = (m_1 - m_2)g, \quad (101)$$

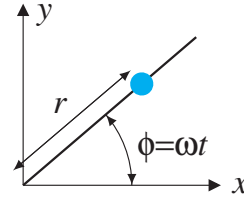
jolloin Lagrangen yhtälö antaa liikeyhtälön

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = (m_1 - m_2)g. \quad (102)$$

Tämän ratkaisu on

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) gt^2 + v_0t + x_0. \quad (103)$$

Esim. 4. Helmi tasaisesti pyörivässä langassa



Tämä on esimerkki ajasta riippuvasta rajoitusehdosta. Koska $\phi = \omega t$, ainoa vapaa koordinaatti on r . Olettaen $V = 0$ saadaan

$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2). \quad (104)$$

Lagrangen yhtälöstä saadaan

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - m\omega^2 r. \quad (105)$$

Tämän yleinen ratkaisu on

$$r = A \exp(\omega t) + B \exp(-\omega t). \quad (106)$$

Tässä on kaksi tuntematonta vakiota A ja B , kuten kuuluu toisen asteen differentiaaliyhtälön yleisessä ratkaisussa. Näiden arvot voidaan määrittää kun tunnetaan helmen paikka ja nopeus jollain ajanhetkellä.

Nopeuksista riippuvat potentiaalit

Kuten aikaisemmin todettiin, Lagrangen yhtälöiden

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (76)$$

voimassaolo nopeuksista riippuvien potentiaalien tapauksessa vaatii yleistetylle voimalle lausekkeen

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (75)$$

Osoitetaan, että tämä on voimassa *varatulle hiukkaselle sähkömagneettisessa kentässä*. Hiukkaseen vaikuttaa Lorentz-voima

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (107)$$

missä

- q = varaus
- \mathbf{E} = sähkökenttä
- \mathbf{B} = magneettivuon tiheys
- \mathbf{v} = hiukkasen nopeus.

Kentät toteuttavat Maxwellin yhtälöt

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (108)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (109)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (110)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}. \quad (111)$$

Kaavoista (109) ja (110) on mahdollista päätellä, että \mathbf{E} ja \mathbf{B} voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (112)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (113)$$

missä $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ on skalaaripotentialiaali ja $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ vektoripotentialiaali. [Osoita että "materiaalittomat" yhtälöt (109) ja (110) toteutuvat tällöin automaattisesti.] Lorentz-voimaksi saadaan

$$\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]. \quad (114)$$

Valitaan nyt yleistyt koordinaatit q_i samoiksi kuin karteesiset koordinaatit x, y ja z , jolloin $Q_1 = F_x$ jne. Pyritään löytämään potentialiaali $V(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ niin että kaavaan (75) sijoitettuna se antaisi voiman (114).

Nyt

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}. \quad (115)$$

(Tällaisissa lausekkeissa tulee vektorialgebran oikeellisuuden lisäksi kiinnittää huomiota siihen, että nablat operoivat samoihin suureisiin yhtälön molemmilla puolilla. Koska $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ ja \mathbf{r} käsitellään osittaisderivoinneissa toisistaan riippumattomiksi, ei tässä haittaa se että oikean puolen ensimmäisessä termissä nabla operoi myös \mathbf{v} :hen.) Sijoittamalla saadaan

$$\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} \right]. \quad (116)$$

Jotta tätä voitaisiin sieventää, muodostetaan kokonaisderivaatta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t) &= \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ &= (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (117)$$

Tämä lauseke voidaan tulkita fysikaalisesti siten että $d\mathbf{A}/dt$ kuvaa kentän muutosta, jonka hiukkanen näkee: termi $\partial\mathbf{A}/\partial t$ kuvaa kentän muutosta ajassa dt kiinteässä pisteessä \mathbf{r} . Termi $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ taas ottaa huomioon, että tässä ajassa hiukkanen on liikkunut matkan $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ ja kenttä muuttunut sen takia (sikäli kun kenttä riippuu paikasta).

Kaavan (117) avulla voidaan Lorentz-voima kirjoittaa edelleen muotoon

$$\mathbf{F} = q \left[-\nabla(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right]. \quad (118)$$

Tämän x -komponentti voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} F_x &= q \left[-\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} \right] \\ &= q \left\{ -\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v_x}(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Tämä on samaa muotoa kuin yleistetyn voiman lauseke

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad (75)$$

joten voidaan identifioida Lorentz-voiman nopeudesta riippuva potentialiaali

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = q [\varphi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]. \quad (119)$$

4. Variaatiolaskenta ja Lagrangen yhtälöt

4.1 Hamiltonin periaate

Yleisten koordinaattien q_i ($i = 1, \dots, n$) muodostamaa avaruutta kutsutaan *konfiguraatioavaruudeksi*. Systeemin tilaa kullakin ajanhetkellä kuvaa yksi piste tässä avaruudessa. Ajan kuluessa tämä piste (yleisesti) liikkuu ja siten piirtää polun konfiguraatioavaruudessa.

Edellä johdettiin Lagrangen yhtälöt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (76)$$

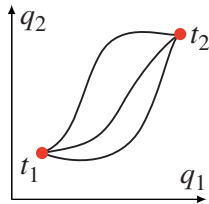
Tämä on differentiaaliyhtälö. Ts. se on *differentiaalinen (eli lokaali) ehto*, joka sitoo systeemin tilan jollain hetkellä t infinitesimaalisen lähellä oleviin aikoihin $t + dt$. Tästä ehdosta toki voidaan johtaa systeemin aikakehitys pitkänkin aikavälin yli, kun differentiaaliyhtälö ratkaistaan.

Joissain tapauksissa on hyödyllistä Lagrangen yhtälön (76) sijasta käyttää *integraalimuotoista (eli globaalia) ehtoa*. Siinä lausutaan suoraan ehto polulle konfiguraatioavaruudessa kahden pisteen välillä vastaten äärellistä aikaväliä (t_1, t_2) . Mekaniikan integraalieron nimi on *Hamiltonin periaate*:

Olkoon annettuna konfiguraatioavaruuden kaksi pistettä, ja niitä vastaavat ajanhetket t_1 ja t_2 . Systeemin liike näiden välillä tapahtuu siten, että integraalilla

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt; \quad L = T - V \quad (120)$$

on ääriarvo.



Seuraavassa pyritään ymmärtämään Hamiltonin periaate tarkemmin, ja osoitetaan, että se on ekvivalentti Lagrangen yhtälöiden kanssa. Sitä ennen on hyödyllistä opetella vähän puhdasta matematiikkaa.

4.2 Variaatiolaskentaa

Olemme tutustuneet (reaaliarvoisiin) funktioihin, jotka riippuvat yhdestä muuttujasta $A(y)$, tai useammasta muuttujasta

$$A(y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (121)$$

Nyt haluamme yleistää funktioihin A , jotka riippuvat äärettömästä määrästä muuttujia $y(x)$, kun $x_1 < x < x_2$. Toisin sanoin, vastaten mitä tahansa funktiota $y(x)$, on

olemassa yksi luku $A(y)$. Tällaista funktion funktiota kutsutaan *funktionaaliksi*. Erityisen yksinkertainen esimerkki funktionaalista on määrätty integraali

$$A(y) = \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx. \quad (122)$$

Seuraavassa tutkimme hieman yleisempää funktionaalia, joka on muotoa

$$A(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), \frac{dy(x)}{dx}, x) dx, \quad (123)$$

ja f on jokin kolmen muuttujan funktio. Esimerkiksi

$$A(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + xy^2 \right] dx. \quad (124)$$

Lisäksi oletamme, että $y(x_1) = y_1$ ja $y(x_2) = y_2$ on kiinnitetty vakioksi. Kaikki funktiot oletetaan matemaattisesti hyvin käyttäytyviksi (jatkuviksi ja 2 kertaa derivoituviksi).

Seuraavaksi haluamme tutkia ääriarvoja, eli minimejä ja maksimeja. Tavallisen yksimuuttujaisen funktion ääriarvot saadaan ehdosta

$$\frac{dA(y)}{dy} = 0. \quad (125)$$

Miten tämä yleistetään funktionaaliin? Ts. miten derivoida funktiota toisen funktion suhteen?

Ratkaisu. Oletetaan, että funktio $y(x)$ antaa funktionaalin (123) ääriarvon. Tarkastellaan tällöin funktiota

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x). \quad (126)$$

Tässä $\eta(x)$ on funktio jolle $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, ja α on uusi riippumaton parametri. Muodostetaan

$$A(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \frac{dy(x, \alpha)}{dx}, x) dx. \quad (127)$$

Merkitään $dy/dx \equiv \dot{y}$ ja lasketaan derivaatta

$$\begin{aligned} \frac{dA(\alpha)}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{d\alpha}(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d\eta}{dx} \right) dx. \end{aligned} \quad (128)$$

Jälkimmäisestä termistä saadaan osittaisintegroinnilla

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d\eta}{dx} dx = \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \eta dx. \quad (129)$$

Sijoitustermi häviää koska $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

Saadaan siis

$$\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] \eta dx. \quad (130)$$

Jotta $y(x)$ antaisi A :lle ääriarvon, täytyy

$$\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0. \quad (131)$$

Erityisesti integraali (130) pitää hävitä kaikille funktiolle $\eta(x)$. Koska voidaan aina valita $\eta(x)$:ksi funktio joka on nolasta poikkeava vain mielivaltaisen pisteen lähiympäristössä, voidaan ehto (131) toteuttaa vain jos harkasulkulauseke kaavassa (130) häviää. Siis

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad \forall x.} \quad (132)$$

Tämä *Eulerin yhtälö* on variaatiolaskennan päätulos. Nimi variaatiolaskenta tulee siitä, että yhtälössä (126) esiintyvää y :n muutosta usein kutsutaan y :n variaatioksi $\delta y = \eta(x)d\alpha$ (tarkemmin myöhemmin).

Esim. 1. Tavalliselle integraalille

$$A(y) = \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx \quad (122)$$

saadaan $f = y$. Tällöin

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \equiv 1, \quad (133)$$

ts. Eulerin yhtälö ei koskaan ole toteutunut. Integraalilla (122) siis ei ole ääriarvoja yleisessä funktiojoukossa $y(x)$, niin kuin tietysti luonnollista onkin.

Esim. 2. Määrättävä kahden pisteen välinen lyhin etäisyys tasossa. Tasossa viivaelementin pituus on

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (134)$$

Etsitään integraalin

$$A = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \quad (135)$$

minimiä. Nyt

$$f = f(\dot{y}) = \sqrt{1 + \dot{y}^2}, \quad (136)$$

joten

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (137)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}. \quad (138)$$

Eulerin yhtälö tulee muotoon

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0, \quad (139)$$

joten täytyy olla

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = C = \text{vakio}. \quad (140)$$

Nähdään, että y toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\dot{y} = a, \quad (141)$$

missä vakio a on

$$a = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}}. \quad (142)$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$y = ax + b \quad (143)$$

eli suoran viivan yhtälö.

Eulerin yhtälön toinen muoto

Eulerin yhtälö

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (132)$$

on käytännöllinen siinä tapauksessa, että $\partial f / \partial y = 0$, koska tällöin saadaan heti ensimmäinen integraali

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \text{vakio}. \quad (144)$$

Usein esiintyy kuitenkin tapaus, että $\partial f / \partial x = 0$. Tällöin on käytännöllistä muokata Eulerin yhtälö toiseen muotoon

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - \dot{y} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0. \quad (145)$$

Siinä tapauksessa, että $\partial f / \partial x = 0$ siis myös saadaan ensimmäinen integraali, joka on

$$f - \dot{y} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \text{vakio}. \quad (146)$$

Toisen muodon (145) todistus:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - \dot{y} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} - \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \ddot{y} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \dot{y} \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \\ &= \dot{y} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (147)$$

Esim. 3. *Minimaalinen pyörähdyspinta*

Etsitään pinta-alaltaan pienin pinta, joka on pyörähdyssymmetrinen x -akselin ympäri; esimerkiksi saippuakalvo kahden renkaan välillä. Yhden suikaleen pinta-ala on $2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$. Jätetään vakiotekijä 2π pois, jolloin minimoitavaksi jää integraali

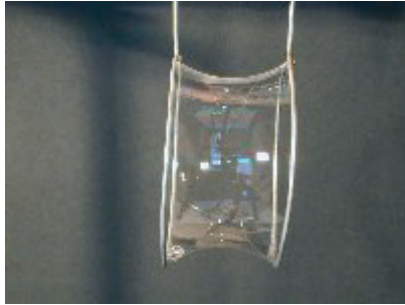
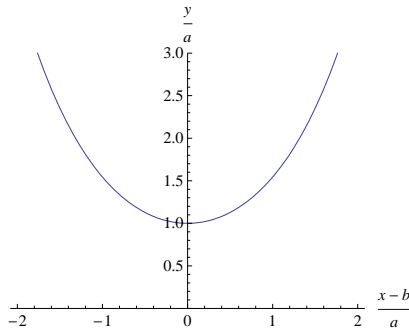
$$A = \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx. \quad (148)$$

Koska $f = y \sqrt{1 + \dot{y}^2}$ ei riipu eksplisiittisesti x :stä, saadaan ensimmäinen integraali kaavasta (146):

$$\begin{aligned} C &= f - \dot{y} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = y \sqrt{1 + \dot{y}^2} - \dot{y} \frac{y \dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \\ &= \frac{y}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}. \end{aligned} \quad (149)$$

Totea laskemalla että tämän yleinen ratkaisu on

$$y(x) = a \cosh \left(\frac{x - b}{a} \right). \quad (150)$$



Minimaalinen pyörähdyspinta toteutettuna saippuakalvolla. Lähde

<http://www.funsci.com/fun3.en/exper2/exper2.htm>

Seuraava esimerkki ei kuulu kurssiin, mutta se on jätetty tähän osoituksena hieman monimutkaisemmasta tapauksesta.

Esim. 4. Tämä esimerkki on hieman vaativampi ja siinä käytetään variaatiomerkinä, joka opitaan vasta seuraavassa luvussa, joten tähän harjoitukseen kannattaa palata vasta sen jälkeen.

Tutkitaan nesteen pinnan muotoa pystysuoran tasaisen seinämän lähellä. Oletetaan että eri rajapintoihin liittyvät seuraavat energiat pinta-alaa kohti: neste-kaasu σ , neste-kiinteä σ_l ja kaasu-kiinteä σ_g . Väitämme nyt että ongelmaa kuvaa funktionaali

$$E = \int_0^\infty dx \left(\sigma \sqrt{1 + \dot{y}^2} + \frac{1}{2} g \rho y^2 \right) + \sigma_l y(0) - \sigma_g y(0), \quad (151)$$

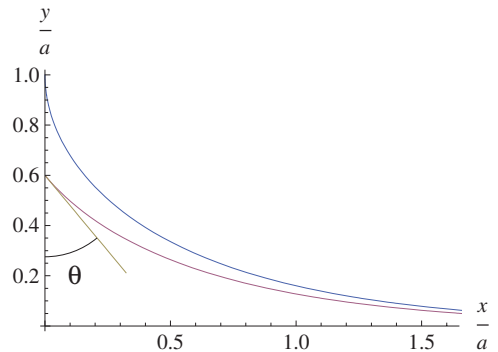
missä $y(x)$ on pinnan korkeus ja E on energiatiheys (energia jaettuna rajapinnan pituudella tarkasteltavaa $x - y$ -tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa). Seinämä on kohdassa $x = 0$, ja reunaehtona annetaan $y(x \rightarrow \infty) = 0$. Perustele harjoitustehtävänä että energia (151) kuvaa annettua ongelmaa ja että integroitavan jälkimmäinen termi kuvaa pinnan noususta korkeuteen $y(x)$ aiheutuvaa painovoimaenergian muutosta (ρ on nesteen tiheys). Osoita että E :n variaatiolle saadaan

$$\delta E = \int_0^\infty dx \left(-\sigma \frac{d}{dx} \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} + g \rho y \right) \delta y + \left(\sigma_l - \sigma_g - \sigma \frac{\dot{y}(0)}{\sqrt{1 + \dot{y}^2(0)}} \right) \delta y(0). \quad (152)$$

Jotta E :llä olisi ääriarvo $\delta y(0)$:n suhteen, täytyy jälkimmäisen sulklausekkeen hävitä. Kun määrittelemme

kontaktikulman θ niin että $\dot{y}(0) = -\cot \theta$, saadaan ehto $\sigma_g = \sigma_l + \sigma \cos \theta$. Tulkitse tämä kolmen pintajännitysvoiman y -komponenttien voimatasapainona. Kaavan (152) integraalitermi on samaa tyyppiä kuin edellä. Koska $f = \sigma \sqrt{1 + \dot{y}^2} + \frac{1}{2} g \rho y^2$ ei suoraan riipu x :stä, on helppoin käyttää Eulerin yhtälön toista muotoa. Osoita että tästä seuraa kontaktikulman ja nesteen nousukorkeuden välille yhtälö $y(0) = a \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ missä $a = \sqrt{2\sigma/g\rho}$. Pienellä vaivalla saadaan myös toinen integrointi tehtyä, jolloin saadaan

$$\frac{x - x_0}{a} = 1 - \sqrt{2 - (y/a)^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - (y/a)^2}}{(\sqrt{2} - 1)y/a}. \quad (153)$$



Nesteen pinnan muoto kontaktikulmille $\theta = 0$ ja $\theta = 40^\circ$. Puhtaan veden ja ilman rajapinnalle normaaliolosuhteissa $a = 3.9$ mm.

Seuraavaksi palaamme takaisin Hamiltonin periaatteen.

4.3 Mekaniikan johto Hamiltonin periaatteesta

Hamiltonin periaatteen mukaan *vaikutusfunktionaalilla* (action functional)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) dt \quad (154)$$

on ääriarvo kun q_1, \dots, q_n on kiinnitetty ajanhetkillä t_1 ja t_2 . Ainoa olennainen ero tässä edellä käsitellyyn tapaukseen (123) nähden on, että funktioita $q_i(t)$ on enemmän kuin yksi. Näin ollen kirjoitetaan varioiduille funktioille

$$\begin{aligned} q_1(t, \alpha) &= q_1(t) + \alpha \eta_1(t) \\ q_2(t, \alpha) &= q_2(t) + \alpha \eta_2(t) \\ &\dots \end{aligned} \quad (155)$$

Lukuun ottamatta tätä monistumista on Eulerin yhtälön (jota tässä tapauksessa siis kutsutaan Lagrangen yhtälöksi) johto samanlainen kuin edellä.

Siirrytään käyttämään variaatiomerkinä, mitä yleisesti käytetään kirjallisuudessa. Siinä merkitään

$$\frac{dS}{d\alpha} d\alpha = \delta S, \quad (156)$$

ja vastaavasti muille suureille. Koordinaattien variaatioita δq_i kutsutaan usein virtuaalisiksi siirtymäksi: se ei kuvaa hiukkasen paikan muutosta ajassa, vaan *saman-aikaisten* pisteiden eroa konfiguraatioavaruudessa kahden eri polun välillä. Välin päätepisteissä variaatioiden täytyy hävitä, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Yleistäen aikaisempaa käsittelemme saamme

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0. \end{aligned} \quad (157)$$

Koska variaatiot δq_i ovat toisistaan riippumattomia ja mielivaltaisia t :n funktioita, saamme Lagrangen liikeehtälöt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (76)$$

Olemme siis johtaneet Lagrangen yhtälöt lähtien Hamiltonin periaatteesta. On myös mahdollista osoittaa, että Lagrangen yhtälöistä seuraa Hamiltonin periaate.

Hamiltonin periaatetta voidaan pitää fundamentaalisempänä kuin Lagrangen yhtälöitä. Erityisesti Hamiltonin periaate on eksplisiittisesti riippumaton yleisten koordinaattien valinnasta, kun taas Lagrangen yhtälössä esiintyvät aina jotkin koordinaatit. Joissain oppikirjoissa (esim. Landau-Lifshitz) on Hamiltonin periaate otettu lähtökohdaksi, ja koko mekaniikka on johdettu siitä.

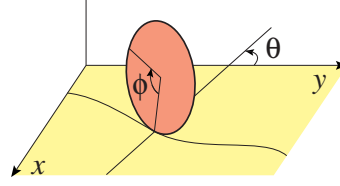
Side-ehdot

Edellä tutkittiin jo esimerkein tapauksia joissa mekaaniseen systeemiin kohdistuu side- eli rajoitusehtoja. Yksi laji side-ehdoista on holonomiset ehdot. Ne ovat muotoa

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) &= 0 \\ h_2(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) &= 0 \\ \dots & \end{aligned} \quad (158)$$

Sopivalla yleisten koordinaattien valinnalla holonomiset side-ehdot voidaan kirjoittaa muotoon jossa joillakin yleisillä koordinaateilla on vakioarvot. Tällöin näihin koordinaatteihin liittyvät Lagrangen yhtälöt voidaan yksinkertaisesti jättää pois tarkastelusta.

On olemassa side-ehdoja, jotka eivät ole holonomisia. Demonstroidaan näitä kiekolla, joka vierii pystyasennossa $x - y$ tasolla.



Kiekkon asennon kuvaamiseen tarvitaan neljä yleistettyä koordinaattia: kosketuspisteen x ja y koordinaatit, kiekon suuntakulma θ sekä kiekon vierintäkulma ϕ . Kun kiekon säde on a , sitovat näitä toisiinsa differentiaaliset ehdot

$$\begin{aligned} dx &= a \cos \theta d\phi \\ dy &= a \sin \theta d\phi. \end{aligned} \quad (159)$$

Näitä ei pysty integroimaan holonomiseen muotoon ennen kuin kiekon liikerata tasossa on ratkaistu. Yleisemmin differentiaaliset side-ehdot voidaan kirjoittaa muotoon

$$\sum_{i=1}^n a_{li} dq_i + a_{lt} dt = 0, \quad (l = 1, \dots, m), \quad (160)$$

missä m on ehtoyhtälöiden lukumäärä.

4.4 Lagrangen yhtälö differentiaalisille side-ehdoille

Seuraavaksi tarkastellaan miten side-ehdot (160) voidaan ottaa huomioon lähdettäessä Hamiltonin periaatteesta. Lagrangen yhtälöiden johto sujuu kuten edellä kaavaan (157) asti

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0. \quad (157).$$

Tästä ei kuitenkaan nyt voi päätellä, että sulkulausekkeet erikseen häviävät, sillä variaatiot $\delta q_i(t)$, joita on n kappaletta ($i = 1, \dots, n$), eivät ole riippumattomia. Niitä sitovat ehdot

$$\sum_{i=1}^n a_{li} \delta q_i = 0, \quad (l = 1, \dots, m). \quad (161)$$

Siis vain $n - m$ kappaletta variaatioista $\delta q_i(t)$ on riippumattomia.

Huomaa, että Hamiltonin periaatetta sovellettaessa tutkitaan variaatiota systeemin yleisiin koordinaatteihin $\delta q_i(t)$ aina kullakin hetkellä t . Näin ollen yhtälössä (160) $dt = 0$ ja siksi aikatermi putoaa pois variaatioissa (161).

Keinoa jolla minimointi (157) tehdään side-ehdojen (161) vallitessa kutsutaan *Lagrangen määräämättömien kertoimien menetelmäksi*. Lähdetään liikkeelle kertomalla rajoitusehdot toistaiseksi mielivaltaisilla ajan funktioilla $\lambda_l(t)$ ja integroidaan saadut lausekkeet ajan yli

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \lambda_l a_{li} \delta q_i dt = 0, \quad (l = 1, \dots, m). \quad (162)$$

Summataan yhteen nämä m yhtälöä sekä Hamiltonin periaatteesta edellä johdettu yhtälö

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0, \quad (157)$$

jolloin saadaan

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{li} \right) \delta q_i dt = 0. \quad (163)$$

Kiinnitetään nyt kertoimet λ_l (joita on m kappaletta) siten, että m kappaletta sulkulausekkeita (163) häviää identtisesti. Valitaan esimerkiksi indeksin i arvot jotka ovat suurempia kuin $n - m$:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{li} = 0, \quad (i = n - m + 1, \dots, n). \quad (164)$$

Kun nämä sijoitetaan integraaliin (163), jää summauksessa jäljelle vain $n - m$ kappaletta i :n arvoja:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{li} \right) \delta q_i dt = 0. \quad (165)$$

Toisaalta juuri $n - m$ kappaletta siirroksista δq_i on toisistaan riippumattomia. Valitsemalla nämä vastaamaan i :n arvoja $1, \dots, n - m$ todetaan, että kaikki δq_i :t kaavassa (165) ovat riippumattomia. Tällöin koko lauseke (165) voi hävitä vain jos kaikki sulkulausekkeet ovat erikseen nollia. Yhdistämällä tämä tulos edellisen (164) kanssa saadaan

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{li}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (166)$$

eli tämä lauseke on voimassa kaikille indeksin i arvoille. Tämä on Lagrangen yhtälö differentiaalisten side-ehtojen (160) tapauksessa.

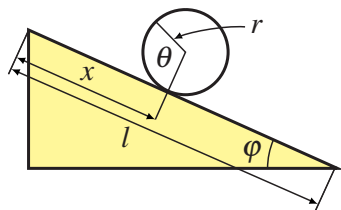
Tavalliseen Lagrangen yhtälöön nähden kaavassa (166) esiintyy m kappaletta kerroinfunktioita λ_l . Näiden määräämiseksi tarvittavat lisäyhtälöt saadaan ehtoyhtälöistä

$$\sum_{i=1}^n a_{li} dq_i + a_{lt} dt = 0, \quad (l = 1, \dots, m) \quad (160)$$

tulkitsemalla ne differentiaaliyhtälöiksi

$$\sum_{i=1}^n a_{li} \dot{q}_i + a_{lt} = 0, \quad (l = 1, \dots, m). \quad (167)$$

Huomaa, että oikean puolen termi Lagrangen yhtälössä (166) voidaan tulkita side-ehtojen aiheuttamaksi yleistetyksi voimaksi.



Esim. Kaltevalla tasolla luistamatta pyörivä vanne

Valitaan yleistetyiksi koordinaateiksi x ja θ . Luistamattomuusehdosta seuraa yksi side-ehto

$$r d\theta = dx, \quad (168)$$

jolloin kertoimiksi a_{1i} kaavassa (160) saadaan

$$a_{1\theta} = r, \quad a_{1x} = -1 \quad \text{ja} \quad a_{1t} = 0. \quad (169)$$

(Tässä yksinkertaisessa esimerkissä side-ehto itse asiassa on suoraan integroitavissa, mutta se soveltuu silti esimerkiksi differentiaalisesta side-ehdosta.)

Kineettinen energia muodostuu massakeskipisteen ja keskipisteen ympäri tapahtuvan pyörimisliikkeen kineettisistä energioista: (perustelu harjoituksena)

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2. \quad (170)$$

Potentiaalienergia on

$$V = Mg(l - x) \sin \varphi. \quad (171)$$

Lagrangen funktio

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2 - Mg(l - x) \sin \varphi. \quad (172)$$

Koska ehtoyhtälöitä on vain yksi, niin tarvitaan vain yksi Lagrangen kertoja. Lagrangen yhtälöiksi (166) saadaan

$$M \ddot{x} - Mg \sin \varphi = -\lambda \quad (173)$$

$$M r^2 \ddot{\theta} = \lambda r \quad (174)$$

ja ehtoyhtälöksi (167)

$$r \dot{\theta} = \dot{x}. \quad (175)$$

Saatiin siis kolme yhtälöä kolmelle muuttujalle x , θ ja λ .

Ehtoyhtälöstä saadaan edelleen

$$r \ddot{\theta} = \ddot{x}, \quad (176)$$

joten jälkimmäisen Lagrangen yhtälön perusteella on

$$M \ddot{x} = \lambda. \quad (177)$$

Sijoittamalla kerroin λ ylempään Lagrangen yhtälöön (173), voimme ratkaista suureen \ddot{x} ja saamme

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \varphi}{2} \quad (178)$$

$$\lambda = \frac{Mg \sin \varphi}{2} \quad (179)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \varphi}{2r}. \quad (180)$$

Siis vanne vierii alas vain puolella siitä kiihtyvyydestä mitä sillä olisi jos kitkaa ei olisi. Yhtälössä (173) suure λ esittää pyörimisestä aiheutuvaa ylimääräistä hitausvoimaa.

Jos vanne lähtee levosta, saadaan kaavasta (178) integroimalla

$$x(t) = \frac{g \sin \varphi}{4} t^2, \quad (181)$$

ja mm. loppunopeus $v = \sqrt{gl \sin \varphi}$.

4.5 Symmetriat ja säilymislaivit

Liiketyhtälöiden osittaisena ratkaisuna saadaan usein säilymislakeja, jotka ovat muotoa $A = \text{vakio}$. Tällaista suuretta A kutsutaan myös *liikevakioksi*. Liiketyhtälöitä ratkaistaessa on aina ensin hyödyllistä löytää mahdolliset säilymislait. Seuraavassa tarkastellaan miten säilymislakeja voi etsiä tutkimalla Lagrangen funktion symmetrioita.

Määritellään *yleistetty liikemäärä* eli *kanoninen liikemäärä*

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (182)$$

Tätä määritelmää käyttäen voidaan Lagrangen yhtälö (76) kirjoittaa muotoon

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (183)$$

Jos Lagrangen funktio L ei riipu eksplisiittisesti jostakin yleistetystä koordinaatista q_i , saadaan tästä välittömästi sitä vastaavalle yleistetylle liikemäärälle $\dot{p}_i = 0$, eli p_i on vakio. Tällaista yleistettyä koordinaattia kutsutaan *sykliseksi*. Toistetaan vielä

Yleistetyn liikemäärän säilymislaki: *Jos Lagrangen funktio ei riipu jostain yleistetystä koordinaatista, tätä koordinaattia vastaava yleistetty liikemäärä on vakio.*

Se että Lagrangen funktio ei riipu jostain koordinaatista on sama kuin, että Lagrangen funktiolla on tietty *symmetria*. Jos esimerkiksi $\partial L / \partial q_1 = 0$, niin kun tehdään muutos $q'_1 = q_1 + c$, missä c on vakio, Lagrangen funktio säilyy muuttumattomana (invarianttina),

$$\begin{aligned} L(q_1 + c, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \\ = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t). \end{aligned} \quad (184)$$

Esim. 1. *Kolmiulotteinen liike yksiulotteisessa potentiaalissa*

Jos potentiaali riippuu vain yhdestä koordinaatista z , saadaan Lagrangen funktio

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(z). \quad (185)$$

Tämän L :n kuvaama systeemi on translaatioinvariantti x - y tasossa, ts. se ei muutu x - y tason suuntaisissa siirroksissa. Sama asia voidaan ilmaista differentiaalisesti

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = \frac{\partial L}{\partial y}. \quad (186)$$

Yleistetyiksi liikemääriksi saadaan

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad (187)$$

mitkä ovat samat kuin tutut liikemäärän x ja y komponentit. Tässä tapauksessa yleistetyn liikemäärän säilymislaki antaa siis normaalit liikemäärän säilymislait

$$p_x = \text{vakio}, \quad p_y = \text{vakio}. \quad (188)$$

Esim. 2. *Liike (tasossa) keskeisvoimakentässä*
Lagrangen funktio [johdettu edellä (88)] on

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r). \quad (189)$$

Tämä on kiertoinvariantti z akselin suhteen, eli L ei riipu kulmakoordinaatista ϕ :

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0. \quad (190)$$

Yleistetyksi liikemääräksi ϕ :n suhteen saadaan

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}. \quad (191)$$

Tämä on sama kuin kulmalikemäärän $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ z -komponentti (laske harjoituksena). Yleistetyn liikemäärän säilymislain mukaan siis

$$p_\phi = \text{vakio}. \quad (192)$$

Esim. 3. *Hiukkanen magneettikentässä*

Jos vektoripotentiaali \mathbf{A} on riippumaton x -koordinaatista, saadaan yleistetyn liikemäärän säilymislaiksi

$$p_x = m\dot{x} + qA_x = \text{vakio}, \quad (193)$$

ts. liikemäärä $m\dot{x}$ ei ole vakio, mutta kanoninen liikemäärä p_x on. (Esimerkki harjoituksessa 4)

Hamiltonin funktio

Edellä tarkasteltiin symmetrioita paikkakoordinaattien suhteen. Vastaavasti voimme kysyä mitä seuraa, jos systeemi on invariantti ajan suhteen. Määritellään ensin *Hamiltonin funktio*:

$$H \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i - L. \quad (194)$$

Nyt väitetään seuraavaa.

Hamiltonin funktion säilymislaki: *Jos L ei riipu eksplisiittisesti ajasta, on Hamiltonin funktio vakio:*

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0. \quad (195)$$

Ehto $\partial L / \partial t = 0$ voidaan myös ilmaista, että L on ajan suhteen symmetrinen, eli muuttumaton siirroissa $t' = t + c$, missä c on vakio:

$$\begin{aligned} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t + c) \\ = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t). \end{aligned} \quad (196)$$

Todistus. Huomaamme, että H :n muoto on olennaisesti sama kuin kohtasimme Eulerin yhtälön toisen muodon kohdalla. Myös perustelu on olennaisesti sama. Lasketaan

suoraan määritelmästä (194)

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i p_i - L \right) \\ &= \sum_i \left(\ddot{q}_i p_i + \dot{q}_i \dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (197) \\ &= \sum_i \ddot{q}_i \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_i \dot{q}_i \left(\dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \end{aligned}$$

missä viimeisellä rivillä ensimmäinen summaus häviää p_i :n määritelmän (182) mukaan, seuraava Lagrangen yhtälön (183) mukaan ja viimeinen termi oletuksen mukaan. ■

Monissa tapauksissa Hamiltonin funktio on sama kuin kokonaisenergia,

$$H = E = T + V. \quad (198)$$

Tällöin Hamiltonin funktion säilyminen on siis sama kuin energian säilyminen. Osoitetaan tämä tärkeä tulos siinä tapauksessa että *potentiaali V ja side-ehdot ovat nopeuksista ja ajasta riippumattomia*. Tällöin voidaan myös yleiset koordinaatit määritellä ajasta riippumattomasti:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, \dots, q_n). \quad (199)$$

Lisäksi oletamme että kineettinen energia on tavanomaista (epärelativistista) muotoa

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k v_k^2. \quad (200)$$

Nyt väitetään että näillä ehdoilla *Hamiltonin funktio on sama kuin systeemin kokonaisenergia*.

Todistus. Kaavasta (199) saadaan nopeus

$$\mathbf{v}_k = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (201)$$

Sijoittamalla tämä kaavaan (200) saadaan kineettinen energia muotoon

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (202)$$

missä

$$A_{ij} = \sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \quad (203)$$

on symmetrinen matriisi: $A_{ij} = A_{ji}$. Lasketaan yleistetty liikemäärä

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij} \delta_{mi} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij} \dot{q}_i \delta_{mj} \\ &= \sum_i A_{mi} \dot{q}_i. \end{aligned} \quad (204)$$

Saadaan siis ensimmäiselle H :ssa (194) esiintyvälle termille

$$\sum_i \dot{q}_i p_i = \sum_{ij} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T,$$

ja siis

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = 2T - (T - V) = T + V = E. \quad (205)$$

■

Myös muissa kuin edellä esitettyssä tapauksessa voidaan H identifioida energian kanssa. Esimerkiksi sähkömagneettisen kentän nopeudesta riippuvan potentiaalinen tapausta tutkitaan myöhemmin luvussa 9.2, ja relativistista tapausta tutkitaan Klassisen kenttäteorian kurssissa.

Nähdään siis, että energian säilymlaki seuraa siitä, että systeemin Lagrangen funktio ei riipu suoraan ajasta. Tämä voitaisiin ottaa energian määritelmäksi: *energia on se säilyvä suure joka on seurausta järjestelmän symmetriasta ajan siirrosta*.

Yleisemmin kaikki käsitellyt säilymlait ovat seurausta jostain symmetriasta, joka on nähtävissä Lagrangen funktiossa.

Tyypillinen tapaus jossa energia *ei säily* on, että tarkasteltavaan järjestelmään vaikuttaa ulkoinen potentiaali tai side-ehto, joka riippuu ajasta. Esim.

$$L = L_0(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - V_e(q_1, \dots, q_n, t), \quad (206)$$

missä L_0 on järjestelmän sisäinen Lagrangen funktio, ja V_e järjestelmän ulkopuolelta tuleva potentiaali. Tällöin yleisesti $\partial L / \partial t \neq 0$, ja sekä järjestelmän energia että H eivät yleensä ole säilyviä suureita. Joissain tapauksissa ajasta riippuvat side-ehdot kuitenkin johtavat Lagrangen funktioon, joka ei riipu eksplisiittisesti ajasta. Tällöin on voimassa säilymlaki $H = \text{vakio}$, mutta tämän ei tarvitse olla sama kun järjestelmän energian. Esimerkki tästä on harjoitustehtävänä.

Kerrataan vielä kaikkein keskeisimmät tulokset:

- Järjestelmän liikeyhtälöt on täysin määrätty kun tunnetaan järjestelmän Lagrangen funktio.
- Säilymlait seuraavat Lagrangen funktion symmetrioista.

Nämä tulokset koskevat kaikkea tällä hetkellä tunnettua fysiikkaa.

5. Kahden kappaleen ongelma

5.1 Redusointi yhden kappaleen ongelmaksi

Tarkastellaan kahta hiukkasta joiden välillä vaikuttaa potentiaali V , joka riippuu vain hiukkasten suhteellisesta sijainnista $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (207)$$

Otetaan käyttöön massakeskipiste ja suhteelliset paikka-vektorit

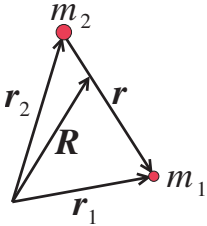
$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (208)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (209)$$

Kääntäen saadaan ratkaisemalla nämä

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \quad (210)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}. \quad (211)$$



Derivoimalla nämä ja sijoittamalla Lagrangen funktioon (207) saadaan

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}). \quad (212)$$

Nähdään heti, että massakeskipistekoordinaatti \mathbf{R} on syklinen, ts.

$$\mathbf{P} = (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = \text{vakio}. \quad (213)$$

Siis \mathbf{R} liikkuu tasaisella nopeudella.

Jatkossa tarkastelemme vain suhteellisista koordinaateista riippuvaa osaa

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}), \quad (214)$$

missä m on redusoitu massa:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Leftrightarrow m = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}. \quad (215)$$

Lisäksi rajoitutaan tarkastelemaan vain keskeispotentiaalia

$$V = V(r), \quad r = |\mathbf{r}|, \quad (216)$$

missä voimat ovat hiukkasia yhdistävän janan suuntaisia.

5.2 Keskeisvoimakentän yleinen ratkaisu

Lausutaan Lagrangen funktio (214) pallokoordinaateissa. Käyttäen kaavaa (98) saadaan

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - V(r). \quad (217)$$

Väitetään että hiukkasen liike keskeisvoimapotentialissa tapahtuu aina yhdessä tasossa.

Todistus. Kirjoitetaan Lagrangen liikeyhtälö koordinaatin θ suhteen. Saadaan

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) - mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0 \quad (218)$$

eli

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0. \quad (219)$$

Olkoon hiukkasen lähtöpiste $\mathbf{r}(0)$ ja lähtönopeus $\mathbf{v}(0)$ mielivaltaiset. Nämä määrittävät kulmaliikemäärän $\mathbf{L} = m\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0)$. Valitaan koordinaatisto siten että sen z -akseli on \mathbf{L} :n suuntainen. Tämä vastaa polaarikulman alkuehtoja $\theta(0) = \pi/2$ ja $\dot{\theta}(0) = 0$. Yhtälön (219) ratkaisu näillä alkuehdoilla on $\theta(t) \equiv \pi/2$, toisin sanoen liike tapahtuu yhdessä tasossa. ■

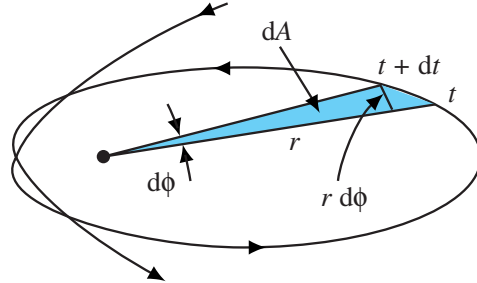
Kun kiinnitetään $\theta \equiv \pi/2$ saa Lagrangen funktio (217) muodon

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r), \quad (220)$$

mikä on sama kuin johdettiin edellä napakoordinaatistossa (88). Koska kulmakoordinaatti ϕ on syklinen, säilyy vastaava yleistetty liikemäärä

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} = l = \text{vakio}. \quad (221)$$

Sädevektorin ajassa dt pyyhkäisemä pinta-ala on $dA = \frac{1}{2}r(rd\phi) = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}dt$. Siis $\frac{dA}{dt}$ on vakio, mikä tulos tunnetaan *Keplerin toisena lakina*.



Hamiltonin funktio H on määritelmän (194) mukaan

$$\begin{aligned} H &= \dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\phi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - L \\ &= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\phi}^2 - L \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r). \end{aligned} \quad (222)$$

Koska Lagrangen funktio ei riipu eksplisiittisesti ajasta, $\partial L/\partial t = 0$, Hamiltonin funktio on systeemin kokonaisenergia E ja säilyvä suure. Käyttäen hyväksi (221) saadaan

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \text{vakio}. \quad (223)$$

Voimme ratkaista tästä radiaalinopeuden \dot{r} . Kulmalii-
kemäärän ja energian säilymislaeista olemme siis saa-
neet johdettua kaksi kytkettyä 1. kertaluvun differentiaa-
lihtälöä

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)} \quad (224)$$

$$\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}. \quad (225)$$

Nämä voidaan periaatteessa ratkaista seuraavasti. Kir-
joitetaan (224) differentiaalimuotoon

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (226)$$

Tästä saadaan integroimalla

$$t = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}, \quad (227)$$

josta voidaan ratkaista $r(t)$. Yhtälö (225) kirjoitetaan vas-
taavasti

$$d\phi = \frac{ldt}{mr^2}, \quad (228)$$

josta saadaan integroimalla

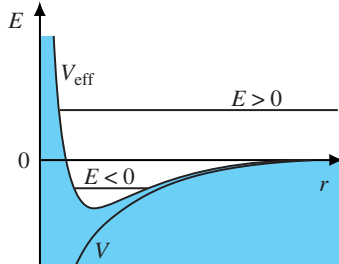
$$\phi = \frac{l}{m} \int_0^t \frac{dt}{r^2(t)} + \phi_0. \quad (229)$$

Kun $V(r)$ on annettu saadaan näistä yleinen ratkaisu jossa
on 4 vakiota l , E , r_0 ja ϕ_0 .

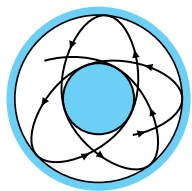
Pyrittäessä kvalitatiiviseen ymmärtämiseen on
hyödyllistä tulkita energialauseke (223) muodossa

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}, \quad V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2mr^2} + V. \quad (230)$$

Tämä voidaan tulkita yksiulotteiseksi liikkeeksi efektiivis-
essä potentiaalissa V_{eff} . Riippuen E :n ja l :n arvoista sekä
potentiaalista $V(r)$, voi liike olla sidottua tai rajoittama-
tonta.



Mahdollisia ratoja $x-y$ tasossa vastaten $E < 0$ ja $E > 0$.



Mikäli olemme kiinnostuneita vain radasta, kannattaa
yhtälöistä (226) ja (228) eliminoida dt , jolloin saadaan

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{l}{r^2 \sqrt{2m(E - V - l^2/2mr^2)}}, \quad (231)$$

jonka muodollinen ratkaisu on

$$\phi = \phi_0 \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2mE/l^2 - 2mV/l^2 - 1/r^2}}. \quad (232)$$

5.3 Ellipsiradat $1/r$ potentiaalissa

Rajoitetaan jatkossa tutkimaan *Keplerin liikettä*, eli po-
tentiaalia

$$V = -\frac{k}{r}. \quad (233)$$

Integraalin (232) laskemiseksi sijoitetaan

$$s = \frac{1}{r} \text{ ja } ds = -\frac{1}{r^2} dr, \quad (234)$$

jolloin saadaan

$$\phi = \phi_0 \mp \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{2mE/l^2 + (2mk/l^2)s - s^2}} \quad (235)$$

$$= \phi_1 \pm \arccos \left(\frac{1 - \frac{l^2 s}{mk}}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} \right), \quad (236)$$

missä ϕ_1 on jokin uusi vakio. Sijoitetaan $r = 1/s$ ja yksin-
kertaistetaan

$$1 - \frac{l^2}{mk} \frac{1}{r} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\phi - \phi_1). \quad (237)$$

Koska suunta $\phi = 0$ voidaan valita vapaasti, voidaan
yksinkertaisuuden vuoksi valita $\phi_1 = 0$. Nyt voidaan tulos
kirjoittaa muotoon

$$r(1 - \varepsilon \cos \phi) = \frac{l^2}{mk}, \quad (238)$$

missä

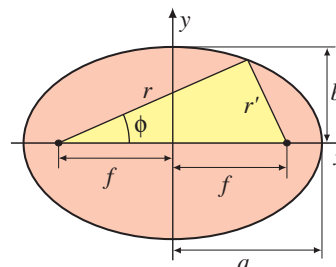
$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}. \quad (239)$$

Jos $E < 0$, rata (238) on ellipsi. Tämän toteamiseksi tut-
kiskellaan *ellipsin määritelmää*.

Ellipsi on niiden tason pisteiden joukko, joiden
etäisyyksien summa $r + r'$ kahdesta *polttopisteestä* $x = \pm f$,
 $y = 0$ on vakio,

$$r + r' = 2a. \quad (240)$$

Tässä a on ellipsin isoakselin puolikas. Määritellään lisäksi
ellipsin eksentrisyys $\varepsilon = f/a$. Ellipseille $0 < \varepsilon < 1$. Pikkuak-
selin puolikkaalle b saadaan $b^2 = a^2 - f^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$.



Kirjoitetaan ellipsin yhtälö toisella tavalla. Valitaan vasen polttopiste napakoordinaatiston origoksi, jolloin r on radiaalikoordinaatti. Kosinilauseesta saadaan

$$r'^2 = r^2 - 4fr \cos \phi + 4f^2. \quad (241)$$

Käyttämällä kaavaa (240) ja $f = \varepsilon a$ tämä saadaan muotoon

$$r(1 - \varepsilon \cos \phi) = a(1 - \varepsilon^2). \quad (242)$$

Pienellä algebrallisella näpertelyllä voi myös osoittaa ellipsin yhtälölle (240) vaihtoehdoisen muodon

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (243)$$

Vertaamalla kaavoja (238) ja (242) todetaan ensimmäinen Keplerin laki: hiukkasen rata $V \propto 1/r$ voimakentässä on ellipsi, jonka toinen polttopiste on voimakeskisteessä. Radan eksentrisyys saadaan kaavasta (239) ja isoakselin puolikkaaksi saadaan

$$a = \frac{l^2}{mk(1 - \varepsilon^2)} = \frac{k}{2|E|}. \quad (244)$$

Ellipsin pinta-ala on

$$A = \pi ab = \pi la \sqrt{\frac{a}{mk}}. \quad (245)$$

Toisaalta pinta-ala jaettuna periodilla τ on sama kuin pintaopeus

$$\dot{A} = \frac{l}{2m} = \frac{A}{\tau}. \quad (246)$$

Periodiksi saamme

$$\tau = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{2m}{l} A = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{k}}. \quad (247)$$

Gravitaatiovoiman tapauksessa $k = Gm_1m_2$ kaavassa (233). Sijoittamalla myös reduoitu massa (215) saadaan

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} a^{3/2}. \quad (248)$$

Jos toisen "keskuskappaleen" massa on paljon suurempi kuin toisen, "planeetan", voidaan planeetan massa tässä kaavassa jättää pois. Tällöin saadaan kolmas Keplerin laki: Saman keskuskappaleen planeetoilla kiertoaika riippuu ainoastaan radan isoakselin pituudesta a , ja on suoraan verrannollinen sen $3/2$ potenssiin.

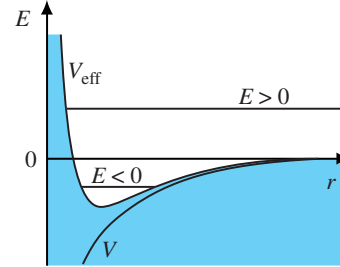
Kokoamme vielä Keplerin kokeellisesti löytämät lait:

- (i) Planeetat kiertävät ellipsiratoja, joiden toisessa polttopisteessä on keskuskappale.
- (ii) Planeetan liikkeen pintaopeus on vakio.
- (iii) Saman keskuskappaleen planeetoilla kiertoaika riippuu ainoastaan radan isoakselin pituudesta ja on suoraan verrannollinen sen $3/2$ potenssiin.

Kertaustehtävä: Mitä oletuksia vaadittiin johdattaessa kutakin lakia?

Ratojen sulkeutuvuus

Saatiin siis, että Keplerin potentiaalissa $V(r) = -k/r$ kaikki radat sulkeutuvat kun $E < 0$, ts. ne palaavat alkupisteeseensä. Osoitetaan seuraavaksi, että yleiselle potentiaalille $V(r)$ tämä on itse asiassa erittäin poikkeuksellinen tapaus.



Kuvasta on ilmeistä, että systeemillä on ympyrärata jos efektiivisellä potentiaalilla (230)

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \quad (249)$$

on minimi. Radan säde r_0 ja energia E_0 saadaan ehdoista

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \Big|_{r_0} \equiv V'_{\text{eff}}(r_0) = 0, \quad E_0 = V_{\text{eff}}(r_0). \quad (250)$$

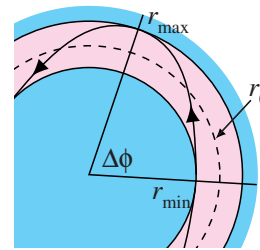
Lisäksi vaaditaan, että toinen derivaatta $V''_{\text{eff}}(r_0) > 0$, jotta rata olisi stabiili.

Tutkitaan pientä häiriötä ympyrärataan, eli E on hiukan suurempi kuin E_0 . Sovelletaan radan kaavaa (232)

$$\phi = \phi_0 \pm \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{eff}}}}. \quad (232)$$

Määrätään tästä se napakulman muutos $\Delta\phi$, jossa hiukan kulkee minimietäisyyden r_{min} ja maksimietäisyyden r_{max} välin:

$$\Delta\phi = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{eff}}}}. \quad (251)$$



Kehitetään V_{eff} Taylorin sarjaksi r_0 :ssa. Lineaarinen termi häviää ja saadaan

$$E - V_{\text{eff}} = E - E_0 - \frac{1}{2} V''_{\text{eff}}(r_0) (r - r_0)^2 + \dots \quad (252)$$

Tämän nollakohdista saadaan

$$r_{\text{max,min}} = r_0 \pm \sqrt{\frac{2(E - E_0)}{V''_{\text{eff}}(r_0)}}. \quad (253)$$

Pienen $E - E_0$:n tapauksessa voidaan kaavassa (251) approksimoida neliöjuurta kertova $r^2 \approx r_0^2$. Tekemällä muutujanvaihdos

$$r - r_0 = s \sqrt{\frac{2(E - E_0)}{V''_{\text{eff}}}} \quad (254)$$

saadaan

$$\Delta\phi = \frac{l}{r_0^2 \sqrt{mV''_{\text{eff}}}} \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{\pi l}{r_0^2 \sqrt{mV''_{\text{eff}}(r_0)}}, \quad (255)$$

missä integraali on ratkaistu sijoituksella $s = \sin\theta$. Koska yleisen potentiaalın tapauksessa r_0 ja $V''_{\text{eff}}(r_0)$ ovat riippumattomia, pätee useimmissa tapauksissa $\Delta\phi \neq \pi$, toisin kuin Keplerin potentiaalille.

Harjoitus: tutki potenssilakipotentialia

$$V = ar^{n+1} \Leftrightarrow \mathbf{F} = -a(n+1)r^n \hat{\mathbf{r}} \quad (256)$$

ja osoita

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{\sqrt{3+n}}. \quad (257)$$

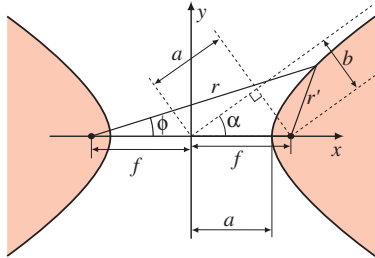
Huom. Tästä seuraa $\Delta\phi = \pi$ Keplerin potentiaalille ($n = -2$), minkä tuloksen tiedämme jo edeltä. Toinen erikoistapaus on harmoninen potentiaali ($n = 1$), jolle $\Delta\phi = \pi/2$. Tässäkin tapauksessa ratkaisu on ellipsi, mutta nyt voimaksepiste on ellipsin keskipisteessä (ei polttopisteessä). Jälkimmäinen on erikoistapaus hajoituksessa 5.1 tutkitusta tapauksesta.

5.4 Hyperbeliradat $1/r$ potentiaalissa

Hyperbeli on niiden tason pisteiden joukko, joiden etäisyyksien erotus $r - r'$ kahdesta polttopisteestä $x = \pm f$, $y = 0$ on vakio,

$$r - r' = \pm 2a. \quad (258)$$

Tässä ylempi ja alempi merkki vastaavat hyperbelin oikeaa ja vasenta haaraa. Kuten ellipsillä määritellään eksentrisyys $\varepsilon = f/a$. Hyperbelille $\varepsilon > 1$.



Kuten ellipsin tapauksessa valitaan vasen polttopiste napakoordinaatiston origoksi, jolloin r on radiaalikoordinaatti. Kosinilauseesta saadaan

$$r'^2 = r^2 - 4fr \cos\phi + 4f^2 \quad (241)$$

ja sijoittamalla tähän hyperbelin määritelmä (258) saadaan

$$r(\varepsilon \cos\phi \mp 1) = a(\varepsilon^2 - 1). \quad (259)$$

Kun $r \rightarrow \infty$ saadaan asymptoottiselle kummalle $\cos\alpha = 1/\varepsilon = a/f$. Asymptootin etäisyydelle b polttopisteestä saadaan $b^2 = f^2 - a^2 = (\varepsilon^2 - 1)a^2$. Pienellä laskulla voidaan osoittaa myös muoto

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (260)$$

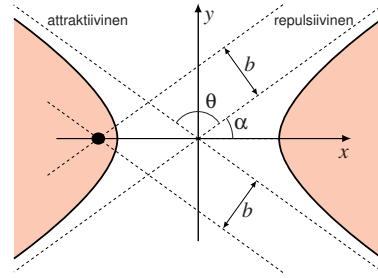
Palaamme tutkimaan $E > 0$ ratoja $1/r$ potentiaalissa. Edellä saimme

$$r[1 - \varepsilon \cos(\phi - \phi_1)] = \frac{l^2}{mk}, \quad (238)$$

missä

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}. \quad (239)$$

Valitsemme keskuskappaleen paikaksi vasemman polttopisteen. Vertaamalla hyperbelin yhtälöön (259) toteamme, että vasen haara (alempi merkki) antaa radan attraktiiviselle potentiaalille ($k > 0$) kun valitaan $\phi_1 = \pi$. Vastaavasti, oikea haara (ylempi merkki) antaa radan repulsiiviselle potentiaalille ($k < 0$) valinnalla $\phi_1 = 0$.



Molemmissa tapauksissa ε (239) antaa eksentrisyyden ja

$$a = \frac{l^2}{(\varepsilon^2 - 1)m|k|} = \frac{|k|}{2E}. \quad (261)$$

Etäisyys b on törmäysparametri eli radan asymptoottisen suoran etäisyys sirontakeskuksesta. Sirontakulma $\theta = \pi - 2\alpha$. Lopputulos tulee osoittamaan, että on hyvä laskea kotangenti tämän puolikkaasta

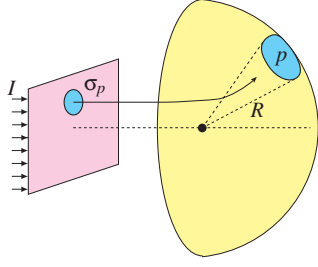
$$\begin{aligned} \cot \frac{\theta}{2} &= \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \\ &= \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \sqrt{\frac{2El^2}{mk^2}} = \frac{mv_\infty^2 b}{|k|}, \end{aligned} \quad (262)$$

missä viimeisessä vaiheessa olemme käyttäneet hiukkasen nopeutta v_∞ kaukana sirontapisteestä ja kaavoja

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2, \quad l = mv_\infty b. \quad (263)$$

5.5 Sironnan vaikutusala

Tutkitaan hiukkasia, jotka saapuvat samasta suunnasta kohti kohtiota. Kohtiosta ne siroavat eri suuntiin, ja ne havaitaan etäisyydellä R , joka on paljon suurempi kuin koh-tion koko.



Sisään tulevien hiukkasten virtaa kuvaa *intensiteetti* I . Se on suihkua vastaan kohtisuorassa olevan pintayksikön läpi aikayksikössä kulkevien hiukkasten lukumäärä. Kaavana

$$I = \frac{N}{\sigma \Delta t}, \quad (264)$$

missä N on hiukasten lukumäärä, σ pinta-ala ja Δt aikaväli.

Tarkastellaan hiukkasia, jotka sirottuaan osuvat tietylle alueelle p . Merkitään näiden hiukkasten määrää N_p :llä. Määritellään p :n *vaikutusala*

$$\sigma_p = \frac{N_p}{I \Delta t}. \quad (265)$$

Vertaamalla kaavaan (264) todetaan, että vaikutusala σ_p on sama kuin sisääntulevan suihkun poikkipinta-ala, jolta hiukkaset siroavat alueelle p .

Sironneiden hiukkasten suuntia p kuvaa *avaruuskulma*,

$$\Omega = \frac{A}{R^2}, \quad (266)$$

missä A on suuntia vastaava pinta-ala R -säteisellä pallolla. Avaruuskulma on analoginen kulman määritelmälle, jossa ympyrän kaaren pituus L jaetaan säteellä, $\alpha = L/R$. Täysi avaruuskulma on $4\pi R^2/R^2 = 4\pi$.

Differentiaalinen vaikutusala määritellään σ_p/Ω :n raja-arvona,

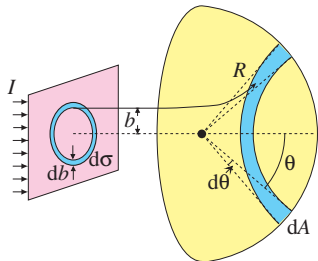
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi) = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\sigma_p}{\Omega}. \quad (267)$$

Yleisesti tämä riippuu sirontakulmasta θ sekä atsimuuttikulmasta ϕ .

Kokonaisvaikutusala määritellään differentiaalisen vaikutusalan integraalina yli täyden avaruuskulman

$$\sigma_{\text{tot}} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi). \quad (268)$$

Tarkasteellaan tapausta, jossa sironta on riippumaton atsimuuttikulmasta ϕ . Oletetaan, että tiedetään sirontakulman riippuvuus sirontaparametristä b : $\theta(b)$. Tällöin sirontavaikutusala voidaan määrätä seuraavasti.



Tarkastellaan hiukkasia jotka kuluvat $b+db$ ja b -säteisten ympyröiden väliin jäävän kaistaleen läpi. Tämän pinta-ala on

$$d\sigma = 2\pi b |db|. \quad (269)$$

Nämä siroavat avaruuskulmaan

$$d\Omega = \frac{dA}{R^2} = 2\pi \sin \theta |d\theta|. \quad (270)$$

Vaikutusalan määritelmästä (267) saadaan tällöin

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (271)$$

Sovellamme tätä kaavaa $1/r$ potentiaaliin. Sirontakulman ja sirontaparametrin yhteydeksi saatiin edellä (262):

$$b = \frac{|k|}{mv_\infty^2} \cot \frac{\theta}{2}. \quad (272)$$

Sijoitetaan tämä differentiaalisen vaikutusalan lausekkeeseen, jolloin

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) &= \left(\frac{k}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{\cot \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \left| \frac{d}{d\theta} \cot \frac{\theta}{2} \right| \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{k}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \end{aligned} \quad (273)$$

Tämän kaavan tärkein sovellus on sähköisesti varatuille hiukkasille. Kahden varauksen Ze ja $Z'e$ välillä vaikuttaa Coulombin potentiaali

$$V(r) = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (274)$$

Siis kerroin k on

$$k = -\frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (275)$$

Tätä vastaava sirontavaikutusala (273) tunnetaan *Rutherfordin vaikutusalan*a.

Huom. Kvanttimekaanisella laskulla saadaan yllättävästi täsmälleen sama tulos kuin yllä. Hyvin nopeille hiukkasille suhteellisuusteoreettiset ilmiöt ovat tärkeitä, ja yllä olevaa tulosta joudutaan korjaamaan.

Kokonaisvaikutusala

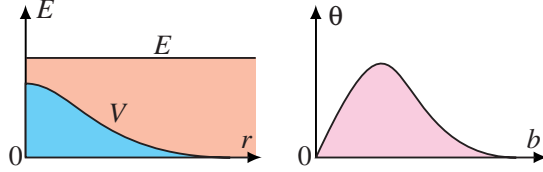
$$\sigma_{\text{tot}} = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \sin \theta d\theta \quad (276)$$

on Coulombin sironnalle ääretön. Tämä johtuu siitä, että differentiaalinen vaikutusala divergoi kuten $1/\theta^4$ kun $\theta \rightarrow 0$. Divergointi on seurausta siitä, että voima $-\nabla V(r)$ on nolasta poikkeava kaikilla etäisyyksillä r . [Harjoitus: piirrä Coulombin sironnan $d\sigma/d\Omega(\theta)$ (273) napakoordinaatistossa.]

Edellä käsitelty vaikutusala $d\sigma/d\Omega(\theta)$ on voimassa massakeskipistekoordinaatistossa mitatulle kulmalle θ . Sama tulos pätee myös laboratoriokoordinaatistossa, jos alunperin paikallaan oleva "sirottava" hiukkanen on paljon

raskaampi kuin "siroava" hiukkanen. Muussa tapauksessa näissä kahdessa koordinaatistossa mitatut sirontakulmat eroavat, ja sirontavaikutusalaa joudutaan muuttamaan siirryttäessä laboratoriokoordinaatistoon.

Coulombin sironta on varsin yksinkertainen, sillä vaikutusala on sirontakulman monotoninen funktio. Osoittaaksemme että näin ei aina ole, tutkitaan kvalitatiivisesti kuvan repulsiivista mutta äärellistä potentiaalia.



Kun energia on suurempi kuin potentiaalin maksimi, kulkee hiukkanen suoraan potentiaalin yli kun $b = 0$, siis $\theta(b = 0) = 0$. Tästä seuraa, että sirontakulmalla on maksimi jollain b :n arvolla. Sirontavaikutusalan kaava (271) onkin kirjoitettava nyt muotoon

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \sum_i \frac{b_i}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|_i, \quad (277)$$

missä summaus on yli niiden b :n arvojen, jotka antavat sirontakulman θ . Koska $db/d\theta$ divergoi kun θ :lla on maksimi, saadaan voimakas sironta juuri tähän kulmaan.

Huom! Sateenkaari syntyy samasta syystä: vesipisarasta sironneen valon sirontakulmalla on ääriarvo sirontaparametrin funktiona.

6. Pienet värähtelyt

Tutkitaan ajasta ja nopeuksista riippumatonta potentiaalia $V = V(q_1, \dots, q_n)$. Lisäksi oletamme, että side-ehdot ja yleistetyt koordinaatit eivät riipu eksplisiittisesti ajasta. Edeltä tiedämme, että kineettinen energia on tällöin neliöllinen funktio \dot{q}_i :ssä (202), siis

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad A_{ij} = \sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}. \quad (278)$$

Tarkastellaan staattista tasapainoa, jossa $\ddot{q}_i = \dot{q}_i = 0$ kaikilla i . Tällöin seuraa Lagrangen yhtälöstä (76) [käyttäen välitulosta (204)], että koordinaateilla q_i pitää olla sellaiset arvot q_i^0 joilla kaikki yleistetyt voimat häviävät

$$Q_i = - \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{\mathbf{q}^0} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (279)$$

Lisäksi oletetaan, että piste \mathbf{q}^0 vastaa V :n minimiä, niin että tasapainopiste on stabiili. Tutkitaan seuraavaksi pientä muutosta systeemin koordinaateissa

$$q_i = q_i^0 + \eta_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (280)$$

Tavoitteena on laskea L tarkkuuteen, joka on neliöllinen η_i :ssä ja $\dot{\eta}_i$:ssä. Koska T :n muoto (278) on eksplisiittisesti neliöllinen $\dot{q}_i = \dot{\eta}_i$:ssä, voidaan (yleisesti q_i -riippuva) kerroinmatriisi laskea tasapainopisteessä:

$$A_{ij} = \sum_k m_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right)_{\mathbf{q}^0} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right)_{\mathbf{q}^0}. \quad (281)$$

Potentiaali V kehitetään Taylorin sarjaksi. Tässä kehittämässä lineaarinen termi häviää kaavan (279) perusteella, jolloin saadaan

$$V = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{\mathbf{q}^0} \eta_i \eta_j. \quad (282)$$

Kun merkitään

$$v_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{\mathbf{q}^0}, \quad (283)$$

saadaan pienten värähtelyjen Lagrangen funktio

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{ij} (A_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - v_{ij} \eta_i \eta_j) - V_0, \quad (284)$$

missä kerroinmatriisit A_{ij} ja v_{ij} ovat reaalisia ja symmetrisiä vakiomatriiseja. Lagrangen yhtälöstä (76) saadaan liikeyhtälöt

$$\sum_{j=1}^n (A_{ij} \ddot{\eta}_j + v_{ij} \eta_j) = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (285)$$

Huomataan, että neliöllinen Lagrangen funktio johti lineaariseen liikeyhtälöön.

Yksinkertainen värähtelijä

Tutkitaan tapausta, jossa on vain yksi yleistetty koordinaatti. Liikkeyhtälö (285) redusoituu tällöin muotoon

$$A\ddot{\eta} + v\dot{\eta} = 0. \quad (286)$$

Tämän fysikaalinen ratkaisu on reaaliarvoinen $\eta(t)$. Yhtälöllä on kuitenkin myös kompleksiarvoisia ratkaisuja, ja onkin käytännöllistä käyttää niitä. Kirjoitamme yrittteen

$$\eta(t) = C \exp(-i\omega t) = C[\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)]. \quad (287)$$

Tämä toteuttaa yhtälön (286) kun $\omega = \pm\sqrt{v/A}$. Yleinen fysikaalinen ratkaisu voidaan luoda käyttäen kumpaa tahansa juurta: tulkitaan fysikaaliseksi ratkaisuksi kompleksisen ratkaisun reaaliosa

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \operatorname{Re}[C \exp(-i\omega t)] \\ &= \operatorname{Re}(C) \cos(\omega t) + \operatorname{Im}(C) \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (288)$$

joka sisältää yleiseltä ratkaisulta vaadittavat kaksi vapaata vakiota $\operatorname{Re}(C)$ ja $\operatorname{Im}(C)$.

Huomaa, että yhtälön (286) kompleksisen ratkaisun reaaliosa on aina myös ratkaisu koska yhtälön kertoimet A ja v ovat reaalisia:

$$\begin{aligned} A\ddot{\eta} + v\dot{\eta} &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= \operatorname{Re}(A\ddot{\eta} + v\dot{\eta}) = A \frac{d^2}{dt^2}(\operatorname{Re} \eta) + v \operatorname{Re} \dot{\eta}. \end{aligned} \quad (289)$$

Monikomponenttinen värähtelijä

Käytetään yleiseen yhtälöön

$$\sum_j (A_{ij}\ddot{\eta}_j + v_{ij}\dot{\eta}_j) = 0 \quad (285)$$

samaa tyyppiä olevaa yritettä kuin yksinkertaisessa tapauksessa:

$$\eta_i(t) = a_i \exp(-i\omega t). \quad (290)$$

Sijoittamalla saadaan

$$\sum_j (v_{ij} - \omega^2 A_{ij})a_j = 0. \quad (291)$$

Vaihtoehtoisesti tämä yhtälö voidaan kirjoittaa myös matriisimuodossa

$$(v - \omega^2 A)\mathbf{a} = 0, \quad (291)$$

missä v ja A ovat $n \times n$ matriiseja joiden elementit ovat v_{ij} ja A_{ij} , ja \mathbf{a} on n -komponenttinen pystyvektori jonka komponentit ovat a_i :

$$\begin{pmatrix} v_{11} - \omega^2 A_{11} & v_{12} - \omega^2 A_{12} & \dots \\ v_{21} - \omega^2 A_{21} & v_{22} - \omega^2 A_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (291)$$

Tätä kutsutaan *ominaisarvotehtäväksi*. Seuraavassa luetellaan todistamatta muutamia tämän ratkaisuun liittyviä tuloksia olettaen, että ne käydään tarkemmin läpi matematiikan kursseissa.

Yhtälöllä (291) on nollasta poikkeava ratkaisu \mathbf{a} vain silloin kun \mathbf{a} :ta kertovan matriisin determinantti häviää:

$$\det(v - \omega^2 A) = 0. \quad (292)$$

Tämä on n :nnen asteen polynomi yhtälö ω^2 :lle. Sen juurina saadaan n kappaletta ominaisarvoja ω_s^2 ($s = 1, \dots, n$). Kerroinmatriisien reaalisuuden ja symmetrisyyden takia kaikki juuret ovat reaalisia. Nämä ominaisarvot antavat systeemin pienten värähtelyjen taajuuudet. Vastaten jokaista juurta ω_s^2 , löytyy reaalinen ominaisvektori $\mathbf{a}^{(s)}$, joka antaa yhtälön (291) ratkaisun tällä taajuudella. Erisuuria ominaistajuuksia vastaavat ominaisvektorit ovat ortogonaalisia seuraavan kaavan mielessä

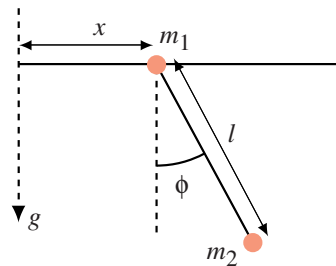
$$\sum_{ij} a_i^{(s)} A_{ij} a_j^{(u)} = \delta_{su} \Leftrightarrow (\mathbf{a}^{(s)})^T \mathbf{A} \mathbf{a}^{(u)} = \delta_{su}. \quad (293)$$

Sen lisäksi, kaikki ominaisvektorit voidaan normalisoida niin, että tämä kaava toteutuu myös tapauksessa $s = u$. Lisäksi, samaan (ns. degeneroituneeseen) ominaisarvoon liittyvät ominaisvektorit voidaan valita niin, että ne ovat ortogonaalisia. Ts. yhtälö (293) voidaan vaatia kaikissa tapauksissa.

Kun ominaistajuuudet ω_s ja ominaisvektorit $\mathbf{a}_i^{(s)}$ on löydetty, voidaan likeyhtälön (285) yleinen fysikaalinen ratkaisu kirjoittaa

$$\eta_i(t) = \operatorname{Re} \sum_{s=1}^n C_s a_i^{(s)} \exp(-i\omega_s t), \quad (294)$$

missä $\operatorname{Re}(C_s)$ ja $\operatorname{Im}(C_s)$ muodostavat tarvittavat $2n$ kappaletta vapaita reaalisia vakioita. Systeemin liike siis muodostuu värähtelymoodeista (n kappaletta), jotka värähtelevät toisistaan riippumattomasti omilla taajuuksillaan ω_s .



Esim. Tutkitaan tasoheiluria, jonka kiinnityskohdassa on massa m_1 ja se pääsee vapaasti liukumaan vaakasuunnassa. Tämän Lagrangen funktio laskettiin harjoitustehtävänä:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\phi}^2 \\ &\quad + m_2 l \dot{x} \dot{\phi} \cos \phi + g m_2 l \cos \phi. \end{aligned} \quad (295)$$

Seuraava vaihe on määrätä tasapainopiste. Siinä $\phi = 0$, mutta x on mielivaltainen. Kirjoitetaan $x = x_0 + \eta_1$ ja $\phi = \phi_0 + \eta_2 = \eta_2$. Poikkeamia laskettaessa otetaan mukaan vain neliölliset termit. Käytäten $\cos \eta_2 = 1 - \frac{1}{2}\eta_2^2 + O(\eta_2^4)$ saadaan

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\eta}_2^2 \\ &\quad + m_2 l \dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2 - \frac{1}{2}g m_2 l \eta_2^2 + \text{vakio}. \end{aligned} \quad (296)$$

Vertaamalla yleiseen kaavaan (284) saadaan matriiseiksi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & gm_2 l \end{pmatrix}. \quad (297)$$

Ominaisaajuudet määräytyvät yhtälöstä

$$\det(\mathbf{v} - \omega^2 \mathbf{A}) = 0. \quad (292)$$

Tämä antaa

$$\omega^2 [g(m_1 + m_2) - \omega^2 l m_1] = 0, \quad (298)$$

eli

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{g(m_1 + m_2)}{l m_1}. \quad (299)$$

Vastaavat (normalisoimattomat) ominaisvektorit ovat

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} -m_2 l \\ m_1 + m_2 \end{pmatrix}, \quad (300)$$

jotka ovat ortogonaalisia kaavan (293) mielessä. Häviävä ominaisarvo johtuu siitä, että systeemi on degeneroitunut translaatioissa x :n suhteen. Huomataan, että toinen ominaisaajuus on korkeampi kuin paikalleen kiinnitetyllä heilurilla saatava $\omega^2 = g/l$.

Normaalikoordinaatit

Edellä esitetty yleinen ratkaisu

$$\eta_i(t) = \operatorname{Re} \sum_{s=1}^n C_s a_i^{(s)} \exp(-i\omega_s t) \quad (294)$$

voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\eta_i(t) = \sum_{s=1}^n a_i^{(s)} \zeta_s(t). \quad (301)$$

Tämä voidaan tulkita koordinaattimuunnokseksi muuttujista η_i muuttujiin ζ_s . Muuttujia ζ_s kutsutaan *normaalikoordinaateiksi*.

Siirtymällä normaalikoordinaatteihin voidaan pienten värähtelyjen Lagrangen funktio (284) kirjoittaa muotoon

$$L = \frac{1}{2} \sum_s (\dot{\zeta}_s^2 - \omega_s^2 \zeta_s^2). \quad (302)$$

[Harjoitus: Osoita tämä sijoittamalla (301) Lagrangen funktioon (284) ja käyttämällä kaavoja (291) ja (293).] Normaalikoordinaateissa lausuttuna liikeyhtälö ja sen yleinen ratkaisu ovat triviaalit:

$$\ddot{\zeta}_s = -\omega_s^2 \zeta_s \quad (303)$$

$$\zeta_s(t) = \operatorname{Re}[C_s \exp(-i\omega_s t)], \quad (304)$$

missä $s = 1, \dots, n$.

Normaalikoordinaatin merkitys tulee paremmin ymmärrettyä vasta kvanttimekaniikassa. On kätevintä (mutta ei välttämätöntä) ensin saattaa Lagrangen funktio normaalikoordinaateilla yksinkertaiseen muotoon (302), ja sitten vasta siirtyä kvanttimekaaniseen käsittelyyn, missä liikeyhtälö ja sen ratkaisu ovat monimutkaisemmat kuin yllä.

7. Jäykän kappaleen liike

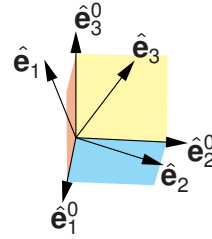
Jäykällä kappaleella tarkoitetaan massipisteiden joukkoa, jossa etäisyydet toisistaan pysyvät vakioina: $|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)| = |\mathbf{r}_i(0) - \mathbf{r}_j(0)|$. Useissa tapauksissa tämä ehto toteutuu riittävällä tarkkuudella kiinteästä aineesta tehdyillä kappaleilla.

7.1 Koordinaatistomuunnokset

Oletetaan, että meillä on suorakulmainen koordinaatisto, joka on paikallaan tai tasaisessa liikkeessä (ns. inertiaalikoordinaatisto). Tämän normeeratut kantavektorit olkoon $\hat{\mathbf{e}}_i^0$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\hat{\mathbf{e}}_i^0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_j^0 = \delta_{ij}. \quad (305)$$

Oletetaan, että meillä on toinen koordinaattijärjestelmä, joka on kiinnitetty jäykkään kappaleeseen, ja siten liikkuu sen mukana. Tässä on toiset ortonormeeratut kantavektorit $\hat{\mathbf{e}}_i$, joille myös $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$.



Mielivaltainen vektori \mathbf{V} voidaan lausua kummassakin koordinaattijärjestelmässä

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 V_i^0 \hat{\mathbf{e}}_i^0 = \sum_{i=1}^3 V_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (306)$$

missä $V_i^0 = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i^0$ ja $V_i = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i$. Inertiaalikoordinaatistossa vektorin aikaderivaatta on

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_{\text{inertial}} = \sum_{i=1}^3 \frac{dV_i^0}{dt} \hat{\mathbf{e}}_i^0. \quad (307)$$

Sama käyttäen liikkuvaa koordinaatistoa

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_{\text{inertial}} = \sum_{i=1}^3 \frac{dV_i}{dt} \hat{\mathbf{e}}_i + \sum_{i=1}^3 V_i \frac{d\hat{\mathbf{e}}_i}{dt}. \quad (308)$$

Tässä oikean puolen ensimmäinen termi tulkitaan \mathbf{V} :n aikaderivaataksi kappaleen koordinaatistossa:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_{\text{kappale}} = \sum_{i=1}^3 \frac{dV_i}{dt} \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (309)$$

mistä seuraa

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_{\text{inertial}} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)_{\text{kappale}} + \sum_{i=1}^3 V_i \frac{d\hat{\mathbf{e}}_i}{dt}. \quad (310)$$

Jälkimmäisen termin laskemiseksi tutkitaan pieniä rotaatioita.

Infinitesimaalinen rotaatio

Jaetaan infinitesimaalinen $d\hat{e}_i$ komponentteihin kannassa \hat{e}_i :

$$d\hat{e}_i = \sum_{j=1}^3 d\Omega_{ij} \hat{e}_j, \quad (311)$$

missä komponentit $d\Omega_{ij} = d\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$. Ottamalla differentiaali ortonormeerausehdosta $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ saamme

$$d\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j + \hat{e}_i \cdot d\hat{e}_j = 0. \quad (312)$$

Tästä päätellään, että $d\Omega_{ij}$ on antisymmetrinen: $d\Omega_{ij} = -d\Omega_{ji}$. Toisin sanoen, matriisin $d\Omega_{ij}$ yhdeksästä komponentista kolme diagonaalista on nollia, ja kuudesta ei-diagonaalisesta komponentista vain kolme on riippumaton. Kirjoitetaan

$$d\Omega_{12} \equiv d\Omega_3, \quad d\Omega_{31} \equiv d\Omega_2, \quad d\Omega_{23} \equiv d\Omega_1. \quad (313)$$

Matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} d\hat{e}_1 \\ d\hat{e}_2 \\ d\hat{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (314)$$

Määritellään vektori

$$d\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^3 d\Omega_i \hat{e}_i. \quad (315)$$

Tällöin voidaan (314) kirjoittaa ristitulon avulla kompaktimpaan muotoon

$$d\hat{e}_i = d\boldsymbol{\Omega} \times \hat{e}_i. \quad (316)$$

(Tarkista laskemalla.) $d\boldsymbol{\Omega}$ voidaan tulkita infinitesimaaliseksi rotaatioksi kulman $|d\boldsymbol{\Omega}|$ verran vektorin $d\boldsymbol{\Omega}$ suuntaisen akselin ympäri.

Infinitesimaalisten rotaatioiden (316) tärkeä ominaisuus on, että ne kommutoivat. Tutkitaan kahta peräkkäistä rotaatiota. Ensimmäisessä

$$\hat{e}'_i = \hat{e}_i + \Delta\boldsymbol{\Omega}_1 \times \hat{e}_i + O(\Delta\Omega_1^2). \quad (317)$$

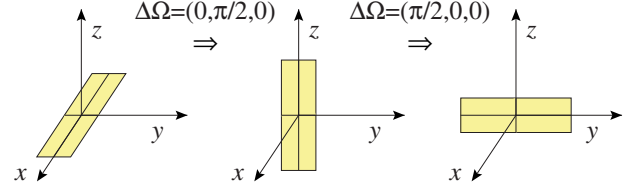
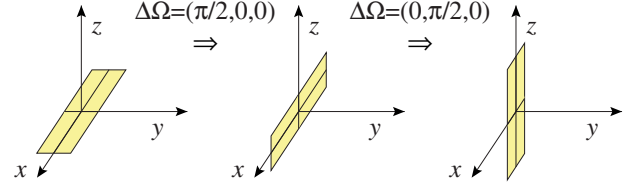
Toisessa

$$\hat{e}''_i = \hat{e}'_i + \Delta\boldsymbol{\Omega}_2 \times \hat{e}'_i + O(\Delta\Omega_2^2). \quad (318)$$

Sijoittamalla \hat{e}'_i ensimmäisestä rotaatiosta saadaan

$$\begin{aligned} \hat{e}''_i &= \hat{e}_i + (\Delta\boldsymbol{\Omega}_1 + \Delta\boldsymbol{\Omega}_2) \times \hat{e}_i \\ &\quad + O(\Delta\Omega_1^2, \Delta\Omega_1\Delta\Omega_2, \Delta\Omega_2^2). \end{aligned} \quad (319)$$

Toisin sanoen, tulos on lineaarisen termin osalta riippumaton rotaatioiden järjestyksestä. Siis infinitesimaalisille rotaatioille kokonaiskierto $d\boldsymbol{\Omega} = d\boldsymbol{\Omega}_1 + d\boldsymbol{\Omega}_2$. On huomattava, että tämä tulos ei päde äärellisiin rotaatioihin, kuten voidaan helposti nähdä esim. tarkastelemalla 90 asteen kiertoja koordinaattiakselien suhteen.



Kulmanopeus

Palataan kaavaan

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{\text{inertial}} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{\text{kappale}} + \sum_{i=1}^3 V_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}. \quad (310)$$

Viimeinen termi voidaan nyt laskea käyttäen kaavaa (316)

$$\sum_{i=1}^3 V_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \sum_{i=1}^3 V_i \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \hat{e}_i = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{V}. \quad (320)$$

Kun vielä määritellään kappaleen hetkellinen kulmanopeus

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}, \quad (321)$$

saadaan kaavan (310) lopullinen muoto

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{\text{inertial}} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{\text{kappale}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}. \quad (322)$$

Koska tämä pätee mielivaltaiselle vektorille \mathbf{V} , sen voi lausua myös operaattorimuodossa, jossa \mathbf{V} on jätetty kirjoittamatta:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{inertial}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{kappale}} + \boldsymbol{\omega} \times. \quad (322)$$

Soveltaen kaavaa (322) paikkavektorille \mathbf{r} saadaan

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{inertial}} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{kappale}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (323)$$

ja nopeusvektorille

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{\text{inertial}} \\ &= \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{kappale}} + \boldsymbol{\omega} \times \right] \left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{kappale}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right] \\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{\text{kappale}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{kappale}} \\ &\quad + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (324)$$

Tässä $\hat{\omega}$:n koordinaatistoa ei tarvitse määrittellä, koska se on sama molemmissa koordinaatistoissa. [Totea tämä kaavan (322) avulla.] Termiä $2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ kutsutaan Corioliskiiktyvyydeksi, ja termiä $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ sentripetaalikiiktyvyydeksi.

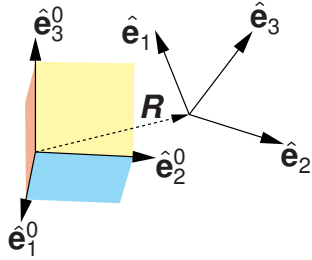
Inertiaalikoordinaatistossa on voimassa Newtonin laki

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{inertial}} = \mathbf{F}^e. \quad (325)$$

Ilmaistaan hiukkasen kiihtyvyys kappaleen koordinaatistossa käyttäen lauseketta (324), jolloin saadaan

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{kappale}} = \mathbf{F}^e - 2m\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{kappale}} - m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (326)$$

Oikea puoli on näennäinen voima joka vaikuttaa hiukkasen kappaleen koordinaatistossa.



Toistaiseksi olemme olettaneet että kappaleen ja inertiaalikoordinaatiston origot yhtyvät. Yleisemmin voimme kirjoittaa paikkavektorille inertiaalikoordinaatistossa $\mathbf{r}_{\text{inertial}} = \mathbf{R} + \mathbf{r}$, missä \mathbf{r} on paikkavektori kappaleen koordinaatistossa ja \mathbf{R} kappaleen koordinaatiston origon paikkavektori inertiaalikoordinaatistossa. Nyt saadaan että nopeus inertiaalikoordinaatistossa

$$\left(\frac{d\mathbf{r}_{\text{inertial}}}{dt} \right)_{\text{inertial}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{inertial}} \quad (327)$$

ja kiihtyvyys inertiaalikoordinaatistossa

$$\left(\frac{d^2 \mathbf{r}_{\text{inertial}}}{dt^2} \right)_{\text{inertial}} = \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} + \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{inertial}}. \quad (328)$$

Tämän seurauksena kaavaan (326) tulee oikealle puolelle lisätermi $-m d^2 \mathbf{R} / dt^2$ niin että koko liikeyhtälö kappaleen koordinaatistossa on

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{kappale}} = \mathbf{F}^e - m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{kappale}} - m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (329)$$

7.2 Hitausmomentti

Ajatellaan jäykän kappaleen muodostuvan joukosta hiukkasia, joiden massat ovat m_k . Kineettinen energia on tällöin

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \mathbf{v}_k^2. \quad (330)$$

Vaihtoehtoisesti voidaan kuvata kiinteätä kappaletta jatkuvasti jakautuneena massana, jonka tiheys on $\rho(\mathbf{r})$ ja nopeus $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Tällöin kineettinen energia

$$T = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho \mathbf{v}^2. \quad (331)$$

Tässä $\int d^3 r$ tarkoittaa integrointia tilavuuden yli. Käytetään jatkossa integraalimuotoa.

Jäykän kappaleen pyöriessä kulmanopeudella $\boldsymbol{\omega}$, saadaan kaavasta (323) kappaleen hiukkasten nopeudeksi $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Pyörimiseen liittyvä kineettinen energia voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int d^3 r \rho \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 r \rho \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 r \rho \boldsymbol{\omega} \cdot [r^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 r \rho \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \omega_i (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) \omega_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \omega_i I_{ij} \omega_j. \end{aligned} \quad (332)$$

Tässä I_{ij} on hitausmomenttitensori:

$$I_{ij} = \int d^3 r \rho (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j). \quad (333)$$

Komponentteittain kirjoitettuna matriisi I on

$$\begin{pmatrix} \int d^3 r \rho (y^2 + z^2) & -\int d^3 r \rho xy & -\int d^3 r \rho xz \\ -\int d^3 r \rho xy & \int d^3 r \rho (x^2 + z^2) & -\int d^3 r \rho yz \\ -\int d^3 r \rho xz & -\int d^3 r \rho yz & \int d^3 r \rho (x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \quad (334)$$

Kappaleeseen kiinnitettyssä koordinaatistossa hitausmomenttitensorin kaikki komponentit ovat vakioita, jotka riippuvat vain kappaleen massajakaumasta.

Lasketaan myös kulmaliikemäärä

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int d^3 r \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \int d^3 r \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \int d^3 r \rho [r^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}], \end{aligned} \quad (335)$$

eli

$$L_i = \int d^3 r \rho [r^2 \omega_i - r_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})] = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j. \quad (336)$$

Sama matriisimuodossa lausuttuna

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (337)$$

Siis hitaustensorin avulla saadaan kulmaliikemäärä kulmanopeudesta. Kineettinen energia voidaan myös kirjoittaa muotoon

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i L_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}. \quad (338)$$

Jäykän kappaleen liikeprobleemat voidaan jakaa kahteen tyyppiin.

1) Jäykän kappaleen yksi piste on kiinnitetty. Tässä tapauksessa on järkevintä laskea kaikki edellä esitetyt suureet tämän pisteen suhteen.

2) Mikään jäykän kappaleen piste ei ole kiinnitetty. Tällöin liike voidaan jakaa massakeskipisteen translaatioksi ja pyörimiseksi massakeskipisteen suhteen. Monissa tapauksissa nämä kaksi liikettä separoituvat toisistaan samaan tapaan kuin kahden kappaleen ongelmassa edellä. Tällöin on järkevintä laskea kaikki edellä esitetyt suureet suhteessa massakeskipisteeseen.

Pääakselit

Edellä kantavektorit $\hat{e}^{(s)}$ on valittu niin, että ne kääntyvät kappaleen mukana. (Indeksien sekoittumisen välttämiseksi, merkitään eri kantavektoreita yläindeksillä, $s = 1, 2, 3$.) Niiden asentoa kappaleeseen nähden ei kuitenkaan ole vielä tarkemmin määrätty. On käytännöllistä valita kantavektorit $\hat{e}^{(s)}$ niin, että hitausmomenttitensori (333) on mahdollisimman yksinkertainen.

Aloitetaan tarkastelemalla sellaista mahdollisuutta, että \mathbf{L} kaavassa (336) olisi samansuuntainen kuin $\boldsymbol{\omega}$. Tällöin siis olisi olemassa jokin vakio λ siten että $\mathbf{L} = \lambda\boldsymbol{\omega}$. Pian tullaan osoittamaan että aina löytyy kolme sellaista kulmanopeusvektoria $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$, $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ ja $\boldsymbol{\omega}^{(3)}$ siten että niitä vastaavat kulmaliikemäärät ovat

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(1)} &= I_1\boldsymbol{\omega}^{(1)} \\ \mathbf{L}^{(2)} &= I_2\boldsymbol{\omega}^{(2)} \\ \mathbf{L}^{(3)} &= I_3\boldsymbol{\omega}^{(3)}. \end{aligned} \quad (339)$$

Lisäksi osoitetaan pian, että vektorit $\boldsymbol{\omega}^{(s)}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Näin ollen voidaan kantavektorit $\hat{e}^{(s)}$ valita vektorien $\boldsymbol{\omega}^{(s)}$ suuntaisiksi. Tässä kannassa ensimmäinen relaatioista (339) voidaan kirjoittaa

$$\begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (340)$$

Tästä nähdään välittömästi että $I_{21} = I_{31} = 0$ ja $I_{11} = I_1$. Toistamalla sama kahdelle muulle relaatiolle (339) saadaan seuraava tulos.

Hitausmomenttitensori edellä konstruoidussa kannassa on diagonaalinen,

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (341)$$

Näin valittuja koordinaattiakseleita kutsutaan *pääakseleiksi* ja vastaavia hitausmomentin arvoja I_1 , I_2 ja I_3 *päähitausmomenteiksi*. Tällöin saavat kaavat (336) ja (338) yksinkertaisemmat muodot

$$L_i = I_i\omega_i, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i\omega_i^2. \quad (342)$$

Jotta edellä oleva tulos tulisi osoitettua, meidän on tarkasteltava yhtälöä $\mathbf{L} = \lambda\boldsymbol{\omega}$. Käyttämällä yleistä relaatiota (336) ja merkitsemällä kulmanopeusvektoria $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{a}$ tämä on

$$L_i \equiv \sum_{j=1}^3 I_{ij}a_j = \lambda a_i. \quad (343)$$

Vaihtoehtoisesti tämä yhtälö voidaan kirjoittaa myös muotoihin

$$\sum_{j=1}^3 (I_{ij} - \lambda\delta_{ij})a_j = 0, \quad (1 - \lambda\mathbf{l})\mathbf{a} = 0, \quad (343)$$

$$\begin{pmatrix} I_{11} - \lambda & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - \lambda & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (344)$$

missä \mathbf{a} on vektorin \mathbf{a} komponenttien muodostama pystymatriisi. Huomataan, että kyseessä on ominaisarvoehtävä, missä λ on ominaisarvo. Tätä tutkittiin jo pienten värähtelyjen yhteydessä (291). Nyt tilanne on yksinkertaisempi siinä suhteessa, että siellä esiintynyt matriisi \mathbf{A} on nyt yksikkömatriisi $\mathbf{1}$. Pienten värähtelyjen yhteydessä luetellut tulokset voidaan nyt uudelleen lausua seuraavasti.

Yhtälöllä (343) on nollasta poikkeava ratkaisu \mathbf{a} vain silloin kun \mathbf{a} :ta kertovan matriisin determinantti häviää:

$$\det(\mathbf{1} - \lambda\mathbf{l}) = 0. \quad (345)$$

Tämä on kolmannen asteen polynomi yhtälö λ :lle. Sen juurina saadaan 3 kappaletta ominaisarvoja $\lambda^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3$). Matriisin \mathbf{l} reaalisuuden ja symmetrisyyden takia kaikki juuret ovat reaalisia. Koska ominaisarvon kerroinmatriisi on yksikkömatriisi, ominaisvektorit ovat ortogonaalisia (tai degeneroituneen ominaisarvon tapauksessa vektorit voidaan valita siten) normaalissa mielessä

$$\sum_{i=1}^3 a_i^{(s)} a_i^{(u)} \equiv \mathbf{a}^{(s)} \cdot \mathbf{a}^{(u)} \equiv (\mathbf{a}^{(s)})^T \mathbf{a}^{(u)} = \delta_{su}. \quad (346)$$

Näin on osoitettu pääakseleiksi kelpaavan kannan olemassaolo. Siten on todistettu tulos (341) mielivaltaisen muotoiselle jäykälle kappaleelle. ■

7.3 Eulerin yhtälöt

Kurssin alussa johdettiin hiukkasjoukon kulmaliikemäärälle \mathbf{L} ja ulkoiselle momentille $\mathbf{N}^{(e)}$ yhtälö

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{\text{inertial}} = \mathbf{N}^{(e)}. \quad (22)$$

Johdossa oletettiin silloin inertiaalinen koordinaatisto, jonka suhteen \mathbf{L} ja $\mathbf{N}^{(e)}$ laskettiin. Tutkiskellaan jäykän kappaleen liikkeen kahta tapausta, jotka jo mainittiin edellä.

1) Jäykän kappaleen yksi piste on kiinnitetty. Tässä tapauksessa käytetään yhtälöä (22) tämän pisteen suhteen.

2) Mikään jäykän kappaleen piste ei ole kiinnitetty. Tällöin lasketaan \mathbf{L} ja $\mathbf{N}^{(e)}$ massakeskipisteen suhteen.

Osoittautuu, että yhtälö (22) on voimassa myös tässä tapauksessa. Tätä on tarkasteltu harjoituksen 2 tehtävässä 2.

Sovelletaan yleistä koordinaattimuunnoskaavaa (322) yhtälöön (22):

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{kappale}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}^{(e)}. \quad (347)$$

Kirjoitetaan tämä yhtälö komponenttimuotoon pääakselien muodostamassa koordinaatistossa. Käyttämällä hitaustensorin diagonalisuutta (342) saadaan ensimmäiselle komponentille

$$I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2 = N_1^{(e)}. \quad (348)$$

Sieventäen ja sykliisellä kierrolla saadaan Eulerin yhtälöt

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) + N_1^{(e)} \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) + N_2^{(e)} \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) + N_3^{(e)}. \end{aligned} \quad (349)$$

Tämä on yksi vaihtoehtoinen muoto jäykän kappaleen likeyhtälöille.

Symmetrinen hyrrä, ei ulkoisia voimia

Tutkitaan sovellutuksena tapausta, jossa ei ole ulkoisia voimia ($\mathbf{N}^{(e)} = 0$). Lisäksi oletetaan, että kaksi päähitausmomenttia yhtyvät, mitä tapausta kutsutaan symmetriseksi hyrräksi. Valitaan $I_1 = I_2 \neq I_3$. Viimeinen Eulerin yhtälöistä (349) antaa

$$\dot{\omega}_3 = 0, \quad (350)$$

siis ω_3 on vakio. Kaksi muuta voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\Omega \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \Omega \omega_1, \end{aligned} \quad (351)$$

missä

$$\Omega = \omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}. \quad (352)$$

Tämän tyyppin yhtälöryhmässä on kätevää (mutta ei välttämätöntä) käyttää seuraavaa kikkaa. Määritellään kompleksinen

$$\omega_c \equiv \omega_1 + i\omega_2. \quad (353)$$

Tälle saadaan yhtälö

$$\dot{\omega}_c = i\Omega \omega_c, \quad (354)$$

jonka yleinen ratkaisu on

$$\omega_c = C \exp(i\Omega t). \quad (355)$$

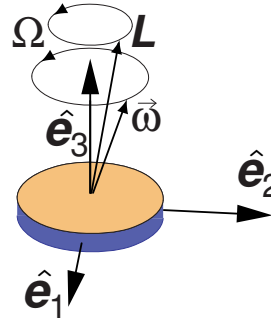
Fysikaalisille suureille saadaan siitä yleinen ratkaisu

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \text{Re}[C \exp(i\Omega t)] = A \cos(\Omega t + \phi_0) \\ \omega_2 &= \text{Im}[C \exp(i\Omega t)] = A \sin(\Omega t + \phi_0), \end{aligned} \quad (356)$$

missä olemme kirjoittaneet vakion $C = A \exp(i\phi_0)$ kahden reaalisen vakion A ja ϕ_0 avulla. Nähdään siis, että kappaleeseen kiinnitettyssä koordinaatistossa kulmanopeusakseli $\boldsymbol{\omega}$ pyörii tasaisella nopeudella symmetria-akselin \hat{e}_3 ympäri. Sama koskee kulmaliikemäärää :

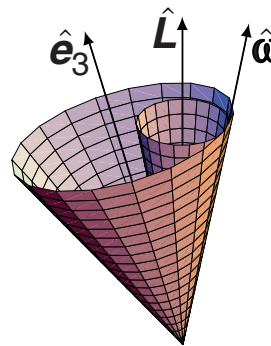
$$\begin{aligned} L_1 &= I_1 \omega \sin \lambda \cos(\Omega t + \phi_0) \\ L_2 &= I_1 \omega \sin \lambda \sin(\Omega t + \phi_0) \\ L_3 &= I_3 \omega \cos \lambda, \end{aligned} \quad (357)$$

missä λ on vektorien $\boldsymbol{\omega}$ ja \hat{e}_3 välinen kulma. Kulmaliikemäärä \mathbf{L} pysyy siis $\boldsymbol{\omega}$:n ja \hat{e}_3 :n virittämässä tasossa.



Huomaa, että Ω (352) on positiivinen kiekkomaiselle kappaleelle ($I_3 > I_1$), mikä tilanne on piirretty kuvassa. Keilamaiselle kappaleelle ($I_3 < I_1$) Ω on negatiivinen, joten $\boldsymbol{\omega}$:n ja \mathbf{L} :n pyörimissuunta on vastakkainen.

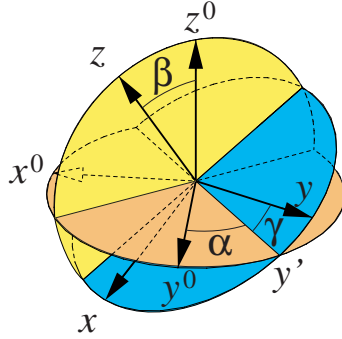
Inertiaalikoordinaatistossa taas \mathbf{L} on vakio. Siellä siis $\boldsymbol{\omega}$ ja \hat{e}_3 pyörivät sen ympäri. Liikettä voi havainnollistaa kahdella kartiolla, joista \mathbf{L} -keskeinen pysyy paikoillaan. Toinen kartio on \hat{e}_3 -keskeinen ja kiinnitetty kappaleeseen. Se pyörii paikoillaan olevan kartion ympäri jatkuvasti sivuten sitä liukumatta. Hetkellinen kulmanopeus $\boldsymbol{\omega}$ pysyy jatkuvasti kartioiden sivuamisviivan suuntaisena. (demonstratio polkupyörän pyörällä)



Maapallo on hieman litistynyt navoiltaan, mistä aiheutuu $(I_3 - I_1)/I_1 \approx 1/305$. Tästä seuraa, että pyörimisakselin pitäisi tehdä yksi kierros noin 305 päivässä. Mittauksissa on todettu tämänkaltaista mutta epäsäännöllistä liikettä. Kiertoakselin poikkeama symmetria-akselista on vain noin 4 m, ja kiertoaika noin 14 kuukautta. Poikkeama teoreettiseen tulokseen johtunee siitä, että maa ei tarkkaan ottaen ole jäykkä kappale.

7.4 Eulerin kulmat

Jäykän kappaleen asento voidaan kuvata kolmen parametrin avulla. Yksi tapa näiden valitsemiseksi on Eulerin kulmat. Muodostetaan kappaleeseen liitetyn koordinaatiston (x, y, z) asento kolmella peräkkäisellä kierrolla koordinaatistosta (x^0, y^0, z^0) . Kaikki kierrot ovat positiiviseen kiertosuuntaan. Ensin kierretään koordinaatistoa z^0 -akselin ympäri kulmalla α , jolloin saadaan koordinaatisto (x', y', z') . Sitten kierretään näin syntynyttä koordinaatistoa sen y' -akselin ympäri kulmalla β , jolloin saadaan koordinaatisto (x'', y'', z'') . Lopuksi kierretään tätä koordinaatistoa z'' -akselin (= z akseli) ympäri kulman γ verran.



Huomaa, että α ja β ovat z -akselin atsimuutti- ja polaarikulmat pallokoordinaatistossa (98). Siten kahdella ensimmäisellä kierrolla ($0 \leq \alpha < 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$) saadaan se osoittamaan mielivaltaiseen suuntaan. Tämän yhden akselin ollessa kiinnitetty, kappaleen asento voi riippua vain kierrosta tämän akselin ympäri. Siten kulman γ valinnalla ($0 \leq \gamma < 2\pi$) saadaan koordinaatisto mielivaltaiseen asentoon.

Jäykän kappaleen kulmanopeus ω muodostuu Eulerin kulmia käytettäessä vektorisummana kolmesta eri komponentista $\omega^{(\alpha)}$, $\omega^{(\beta)}$, ja $\omega^{(\gamma)}$, jotka aiheutuvat koordinaatien α , β ja γ aikaderivaatoista $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ ja $\dot{\gamma}$. Lausutaan seuraavaksi nämä kulmanopeudet kappaleen koordinaatistossa (x, y, z) . Näistä yksinkertaisin on $\omega^{(\gamma)} = \dot{\gamma}\hat{e}_3'' = \dot{\gamma}\hat{e}_3$, sillä se on jo sellaisenaan z -akselin suuntainen. Hieman monimutkaisemmin saadaan

$$\omega^{(\beta)} = \dot{\beta}\hat{e}_2' = \dot{\beta}\hat{e}_2'' = \dot{\beta}(\hat{e}_1 \sin \gamma + \hat{e}_2 \cos \gamma). \quad (358)$$

Viimeiseksi lasketaan

$$\begin{aligned} \omega^{(\alpha)} &= \dot{\alpha}\hat{e}_3^0 = \dot{\alpha}\hat{e}_3' = \dot{\alpha}(-\hat{e}_1'' \sin \beta + \hat{e}_3'' \cos \beta) \\ &= \dot{\alpha}[-\sin \beta(\hat{e}_1 \cos \gamma - \hat{e}_2 \sin \gamma) + \hat{e}_3 \cos \beta] \\ &= \dot{\alpha}(-\hat{e}_1 \sin \beta \cos \gamma + \hat{e}_2 \sin \beta \sin \gamma + \hat{e}_3 \cos \beta). \end{aligned} \quad (359)$$

Laskemalla komponentit yhteen saadaan

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\alpha} \sin \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma = \frac{L_1}{I_1} \\ \omega_2 &= \dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma = \frac{L_2}{I_2} \\ \omega_3 &= \dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma} = \frac{L_3}{I_3}. \end{aligned} \quad (360)$$

Tässä jälkimmäiset yhtäsuuruudet seuraavat siitä, että kappaleen koordinaatisto valitaan pääakselien mukaan ja

siten kulmaliikemäärä on yksinkertaista muotoa (342). Pyörimiseen liittyvä liike-energia (342) voidaan nyt kirjoittaa

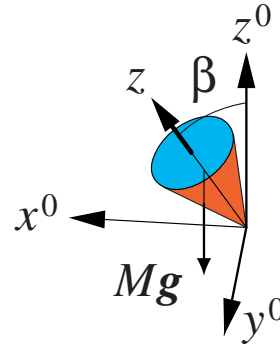
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}I_1(-\dot{\alpha} \sin \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}I_2(\dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}I_3(\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma})^2. \end{aligned} \quad (361)$$

Symmetrinen hyrrä painovoimakentässä

Oletetaan, että hyrrä on kiinnitetty symmetria-akselilla olevasta tukipisteestä, niin voimme kiinnittää huomion vain pyörimisliikkeeseen. Valitaan taas $I_1 = I_2 \neq I_3$. Lagrangen funktioksi saadaan

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}I_1(\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma})^2 \\ &\quad - Mgl \cos \beta, \end{aligned} \quad (362)$$

missä l on massakeskipisteen etäisyys tukipisteestä.



Huomataan, että kulmat α ja γ ovat syklistisiä koordinaatteja, siis niitä vastaavat yleistetyt liikemäärät ovat vakioita:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = I_1 \dot{\alpha} \sin^2 \beta + I_3 \cos \beta (\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma}) = \text{vakio} \\ p_\gamma &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} = I_3 (\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma}) = \text{vakio}. \end{aligned} \quad (363)$$

Kolmas kanoninen liikemäärä

$$p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = I_1 \dot{\beta} \quad (364)$$

sen sijaan ei ole vakio. Suureet p_α , p_β ja p_γ identifioidaan kulmaliikemäärän projektioksi samoille akseleille kuin vastaavat kierrot α , β ja γ : z^0 , y' ja z . (Huom: nämä akselit eivät ole ortogonaalisia.) Siis esim. $p_\alpha = \mathbf{L} \cdot \hat{e}_3^0$. Identifikaatiot voi johtaa kaavoista (360) käyttäen samanlaista geometrista tarkastelua kuin kaavoissa (358) ja (359).

Koska L ei riipu eksplisiittisesti ajasta myös Hamiltonin funktio on vakio. Se on myös sama kuin energia:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}I_1(\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma})^2 \\ &\quad + Mgl \cos \beta = E = \text{vakio}. \end{aligned} \quad (365)$$

Yhtälöistä (363) saamme ratkaistuksi

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \frac{p_\alpha - p_\gamma \cos \beta}{I_1 \sin^2 \beta} \\ \dot{\gamma} &= \frac{p_\gamma}{I_3} - \frac{\cos \beta (p_\alpha - p_\gamma \cos \beta)}{I_1 \sin^2 \beta}.\end{aligned}\quad (366)$$

Sijoittamalla nämä energian lausekkeeseen se saadaan muotoon

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\beta}^2 + V_{\text{eff}}(\beta), \quad (367)$$

missä efektiivinen potentiaali

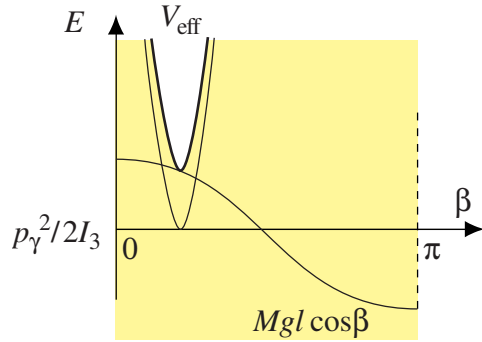
$$V_{\text{eff}}(\beta) = \frac{(p_\alpha - p_\gamma \cos \beta)^2}{2I_1 \sin^2 \beta} + \frac{p_\gamma^2}{2I_3} + Mgl \cos \beta. \quad (368)$$

Liiketyöt siis redusoituvat yksiulotteiseksi liikkeeksi. Samoin kuin aiemmin tässä kurssissa, tämä voidaan ratkaista laskemalla integraali

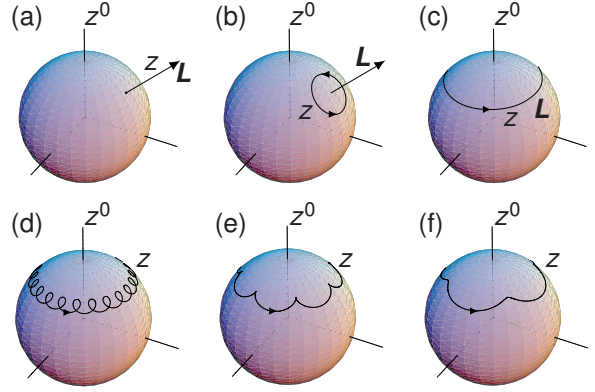
$$t = \pm \sqrt{\frac{I_1}{2}} \int \frac{d\beta}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(\beta)}}. \quad (369)$$

Tyydytään seuraavassa vain liikkeen kvalitatiiviseen kuvailuun.

Rajoitutaan tutkimaan sellaista hyrräliikettä jossa $p_\gamma > p_\alpha$. Tässä tapauksessa saadaan V_{eff} :lle kuvan mukainen käyttäytyminen.



V_{eff} :n minimiä vastaavassa pisteessä β on vakio. Tarkastellaan ensin tapausta jossa painovoiman vaikutus häviää ($Mgl = 0$). Tällöin V_{eff} :n minimissä $p_\alpha - p_\gamma \cos \beta = 0$. Tästä seuraa (366) että $\dot{\alpha} = 0$ ja $\dot{\gamma} = \omega_3 = \omega$. Tämä vastaa hyrrän pyörimistä symmetria-akselinsa ympäri, joka on vakiossa vinossa suunnassa (seuraavan kuvan kohta a). Jos energia on suurempi kuin minimissä, saadaan sama symmetria-akselin pyöriminen kuin luvussa 7.6, mutta nyt vinon \mathbf{L} :n ympäri (b). Kun lisätään painovoiman vaikutus ($Mgl \neq 0$), saadaan, että V_{eff} :n minimissä $p_\alpha - p_\gamma \cos \beta \neq 0$ ja siksi myös $\dot{\alpha} \neq 0$. Siis symmetria-akseli pyörii tasaisella nopeudella pystysuoran suunnan ympäri (c). Tätä kutsutaan *prekessioksi*. Jos energia on suurempi kuin minimissä, tulee tämän liikkeen lisäksi heilahtelu β :ssa ja α :ssa, mitä liikettä kutsutaan *nutaatioksi*. Riippuen prekession ja heilahtelun suhteellisesta nopeudesta, piirtää symmetria-akseli z erilaisia kuvioita (d,e,f).



Kuvassa $I_3 > I_1$.

Maapallo on hieman litistynyt navoiltaan. Maan akseli tekee 23° kulman maan ratatason kanssa. Näistä seuraa, että aurinko ja kuu kohdistavat maahan vääntömomentin, joka on samantyyppinen kuin edellisessä tehtävässä. Tämä saa maan symmetria-akselin prekessoimaan yhden kierroksen noin 26000 vuodessa. Siis pohjantähti on symmetria-akselin suunnassa vain toistaiseksi. Maapallon nutaatio on olennaisesti toisenlainen kuin hyrrällä, sillä siinä tärkeimpänä vaikuttajana ovat auringon ja kuun liikkeet.

8. Hamiltonin mekaniikkaa

8.1 Hamiltonin liikeyhtälöt

Palataan nyt mekaniikan formaaliin kehittämiseen. Edellä käytimme Lagrangen liikeyhtälöitä

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (76)$$

Ne ovat 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöitä. Systeemin liike on täysin määrätty, mikäli koordinaattien q_i ja nopeuksien \dot{q}_i alkuarvot tunnetaan.

Vaihtoehtoinen tapa formuloida mekaniikka on käyttää nopeuksien \dot{q}_i sijasta muuttujina kanonisia liikemääriä

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (182)$$

Tällaista mekaniikan muotoa kutsutaan *Hamiltonin formalismiksi*. Muuttujia (q_i, p_i) kutsutaan *kanonisiksi muuttujiksi*. Siirtyminen muuttujista (q_i, \dot{q}_i) kanonisiin muuttujiin (q_i, p_i) tehdään ns. *Legendren muunnoksen* avulla. Tarkastellaan sitä ensin yleisesti.

Tutkitaan kahden muuttujan funktiota $f(x, y)$. Sen differentiaali voidaan kirjoittaa muodossa

$$df = u dx + v dy. \quad (370)$$

Tästä seuraa, että

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ ja } v = \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (371)$$

Vastaavasti, jos funktiolle $f(x, y)$ pätee (371), seuraa siitä (370). Haluamme nyt vaihtaa muuttujan x tilalle u , siis siirtyä muuttujista (x, y) muuttujiin (u, y) . Legendren muunnoksen olennainen kohta on, että samalla muutetaan funktion f tilalle funktio g , joka saadaan kaavasta

$$g = f - ux. \quad (372)$$

Lasketaan nyt funktion g differentiaali:

$$\begin{aligned} dg &= df - u dx - x du \\ &= u dx + v dy - u dx - x du \\ &= -x du + v dy. \end{aligned} \quad (373)$$

Siis dg :ssä esiintyvät vain differentiaalit du ja dy . Funktion g arvo voi siten riippua vain muuttujista u ja y (ei x :stä):

$$g = g(u, y) \quad (374)$$

sekä

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u} \text{ ja } v = \frac{\partial g}{\partial y}. \quad (375)$$

Sovelletaan Legendren muunnosta Lagrangen funktioon $L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$. (Tässä $\{q_i\}$ on lyhennysmerkintä joukolle q_1, q_2, \dots, q_n .) Otetaan \dot{q}_i :den sijasta uusiksi muuttujiksi kanoniset liikemäärät

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (182)$$

Legendren muunnoksella luodaan uusi funktio samoin kuin edellä, paitsi että 1) muuttujia on nyt useampia, ja 2) funktion etumerkki otetaan päinvastaiseksi. Nähdään, että uusi funktio on sama kuin Hamiltonin funktio (194):

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t). \quad (376)$$

Toistetaan varmuuden vuoksi differentiaalilasku tässä tapauksessa:

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i \\ &\quad - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (377)$$

missä on käytetty määritelmää (182). Nähdään siis, että H on vain muuttujien q_i , p_i ja t funktio (ei \dot{q}_i :tä).

Koska H on muuttujien $\{q_i\}$, $\{p_i\}$ ja t funktio, määritellään sille osittaisderivaatat $\partial H/\partial q_i$, $\partial H/\partial p_i$ ja $\partial H/\partial t$ käsittelemällä näitä muuttujia toisistaan riippumattomina. H :n differentiaali voidaan siten kirjoittaa

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (378)$$

Vertaamalla tätä kaavaan (377) voidaan identifioida osittaisderivaatat

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (379)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (380)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (381)$$

Huomataan että kaavan (379) oikealla puolella oleva suure $\partial L/\partial q_i$ on Lagrangen liikeyhtälön (183) mukaan sama kuin \dot{p}_i . Tästä herää ajatus kirjoittaa liikeyhtälöt symmetrisen näköiseen muotoon

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (382)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (383)$$

Nämä ovat *Hamiltonin kanoniset liikeyhtälöt*. Nämä $2n$ kappaletta yhtälöä ovat ekvivalentit Lagrangen yhtälöiden kanssa, joita on n kappaletta. Huomaa, että Lagrangen differentiaaliyhtälöt ovat toista kertalukua (ajan suhteen), kun taas Hamiltonin yhtälöt ovat ensimmäistä kertalukua, mutta niitä on tuplamäärä. Olennainen ero syntyy siitä, että Lagrangen yhtälöissä muuttuja \dot{q}_i on jatkuvasti sidottu q_i :n aikaderivaataksi, mutta Hamiltonin formalismissa muuttujat q_i ja p_i käsitetään yhtälöitä johdettaessa toisistaan riippumattomiksi. Niiden riippuvuus toisistaan tulee kiinnitetyksi vasta liikeyhtälöissä (382) ja (383).

Fysikaalisen ongelman käsittelyvaiheet Hamiltonin liikeyhtälöitä käytettäessä ovat seuraavat:

- muodostetaan Lagrangen funktio,
- lasketaan yleistetyt liikemäärät,
- muodostetaan Hamiltonin funktio, joka pitää ilmaista kanonisten muuttujien funktiona,
- muodostetaan liikeyhtälöt ja
- liikeyhtälöt integroidaan.

Esim. 1 *Hiukkanen napakoordinaateissa*
Lagrangen funktio on (88)

$$L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r, \phi). \quad (384)$$

Yleistetyt liikemäärät ovat

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (385)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}. \quad (386)$$

Näistä voidaan helposti ratkaista \dot{r} ja $\dot{\phi}$. Hamiltonin funktio saadaan joko suoraan määritelmästä (194) tai käyttäen aputulosta (198). Eliminoimalla \dot{r} ja $\dot{\phi}$ saadaan

$$H(r, \phi, p_r, p_\phi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r, \phi). \quad (387)$$

Hamiltonin liikeyhtälöt ovat siten

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad (388)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \quad (389)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (390)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (391)$$

Nämä ovat 4 kappaletta ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöitä. Eliminoimalla p_r ja p_ϕ todetaan helposti, että ne ovat identtiset Lagrangen liikeyhtälöiden (91) ja (92) kanssa.

8.2 Sähkömagneettinen kenttä

Edellä johdettiin sähkömagneettiselle kentälle potentiaali (119). Yhden hiukkasen Lagrangen funktio on tällöin

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - q\varphi(\mathbf{r}, t) + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (392)$$

Yleistetyiksi liikemääriksi saadaan

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x, \quad (393)$$

ja vastaavasti y ja z -komponenteille, eli

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}. \quad (394)$$

Huomaa siis, että kanoninen liikemäärä \mathbf{p} ei siis ole sama kuin massa kertaa nopeus. Hamiltonin funktio on

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L \\ &= m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\varphi - q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\varphi. \end{aligned} \quad (395)$$

Monien välivaiheiden jälkeen saatiin siis yksinkertainen tulos: kineettinen energia magneettikentässä on näin lausuttuna täysin sama kuin ilman magneettikenttää. Magneettikentän vaikutus tulee näkyviin vasta kun H lausutaan kanonisten muuttujien \mathbf{p} ja \mathbf{r} funktiona:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi. \quad (396)$$

Tämä on hyvin tärkeä tulos, jota käytetään paljon mm. kvanttimekaniikassa.

8.3 Symmetriat

Lagrangen formalismissa johdettiin säilymislait Lagrangen funktion symmetrioista. Hamiltonin formalismi tarjoaa samat tulokset, mutta myös tiettyjä etuja.

Yleistetyt liikemäärien säilymislaiki

Jos Lagrangen funktio ei riipu jostain koordinaatista q_i (ts. se on syklinen), saatiin, että vastaava yleistetty liikemäärä on vakio. Hamiltonin liikeyhtälöstä (383) saadaan, että myöskään Hamiltonin funktio ei tällöin riipu koordinaatista q_i . Siis vastaava säilymislaki Hamiltonin formalismissa tulee siitä, että Hamiltonin funktio ei riipu koordinaatista q_i . Etuna Lagrangen formalismissa nähden on, että Lagrangen liikeyhtälöissä silti esiintyy vielä tuntematon funktio $\dot{q}_i(t)$, kun taas Hamiltonin formalismissa sen tilalla on vakio p_i .

Hamiltonin funktion säilyminen voidaan johtaa kauniisti Hamiltonin formalismissa käyttäen perusyhtälöitä (378), (382) ja (383),

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \quad (397)$$

Siis

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (398)$$

missä jälkimmäinen yhtäsuuruus (381) johdettiin edellä. Siis Hamiltonin funktio on liikevakio ($dH/dt = 0$), jos se ei eksplisiittisesti riipu ajasta ($\partial H/\partial t = 0$).

8.4 Johto variaatioperiaatteesta

Hamiltonin yhtälöt voidaan johtaa myös suoraan variaatioperiaatteesta. Tehdään se tässä. Variaatioperiaatteen mukaan on

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (399)$$

Kirjoitetaan Lagrangen funktio

$$L = T - V \quad (400)$$

Hamiltonin funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (401)$$

avulla muotoon

$$L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t). \quad (402)$$

Nyt

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (403)$$

Näimme aikaisemmin, että varioinnin ja aikaderivoinnin järjestystä voidaan vaihtaa, ts.

$$\delta \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \delta, \quad (404)$$

joten voidaan kirjoittaa

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \frac{d}{dt} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt. \quad (405)$$

Integroidaan osittain toinen termi:

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \delta q_i dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \delta q_i - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dp_i}{dt} \delta q_i dt. \quad (406)$$

Koska variaatiot häviävät radan päätepisteissä, ei sijoitus anna kontribuutiota. Saamme siis

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0. \quad (407)$$

Hamiltonin teoriassa variaatiot δp_i ja δq_i käsitetään toisistaan riippumattomiksi. Siksi integrandissa niiden kertomien on hävitävä. Päädyimme siten Hamiltonin yhtälöihin (382) ja (383):

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (382)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (383)$$

Verrataan vielä Lagrangen ja Hamiltonin liikeyhtälöiden johtoa variaatioperiaatteesta. Johdettaessa Lagrangen liikeyhtälöitä suoritimme varioinnit yleistettyjen koordinaattien ja yleistettyjen nopeuksien suhteen. Relaatio

$$\delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt} \delta q_k \quad (408)$$

liitti nämä variaatiot toisiinsa ja johti toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöihin. Hamiltonin liikeyhtälöitä johtaessamme olemme asettaneet yleistetyt liikemäärät samaan asemaan kuin koordinaatit. Näin koordinaattien ja liikemäärien riippuvuus toisistaan ei ole ennalta määrätty, vaan saadaan vasta liikeyhtälöstä (382).

8.5 Poissonin sulkuuureet

Otetaan käyttöön vielä yksi merkintätapa, jolla on suora yhteys kvanttimekaniikkaan. Tarkastellaan funktiota $A(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$. Kahden tällaisen funktion A ja B Poissonin sulkuuure määritellään

$$[A, B]_{\text{PB}} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right). \quad (409)$$

Tästä määritelmästä nähdään heti, että sulkuuure on antisymmetrinen:

$$[A, B]_{\text{PB}} = -[B, A]_{\text{PB}} \quad (410)$$

ja siis erityisesti

$$[A, A]_{\text{PB}} = 0. \quad (411)$$

Todetaan, että Poissonin sulkuuure on lineaarinen molempien argumenttensä suhteen. Esim. ensimmäisen

$$[A + B, C]_{\text{PB}} = [A, C]_{\text{PB}} + [B, C]_{\text{PB}}, \quad (412)$$

$$[\lambda A, B]_{\text{PB}} = \lambda [A, B]_{\text{PB}}, \quad (413)$$

missä λ on vakio. Harjoituksena osoitetaan kahden funktion tulolle

$$[AB, C]_{\text{PB}} = A[B, C]_{\text{PB}} + [A, C]_{\text{PB}} B. \quad (414)$$

Mainitaan vielä Jacobin identiteetti

$$[A, [B, C]_{\text{PB}}]_{\text{PB}} + [B, [C, A]_{\text{PB}}]_{\text{PB}} + [C, [A, B]_{\text{PB}}]_{\text{PB}} = 0. \quad (415)$$

Sen voi työläästi todistaa suoralla laskulla, tai vähän nokkelammin niin kuin Goldsteinissa.

Tutkitaan Hamiltonin funktion H sulkuuuretta yleisen funktion A kanssa:

$$[H, A]_{\text{PB}} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} \right). \quad (416)$$

Käyttämällä liikeyhtälöitä (382) ja (383) saadaan

$$\begin{aligned} [H, A]_{\text{PB}} &= \sum_i \left(-\frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i - \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \\ &= -\left(\frac{dA}{dt} - \frac{\partial A}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (417)$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{dA}{dt} = -[H, A]_{\text{PB}} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (418)$$

Tämä on *Hamiltonin liikeyhtälö Poissonin sulkuuureilla lausuttuna*. Normaalit Hamiltonin liikeyhtälöt (382) ja

(383) saadaan tästä erikoistapauksena. Tutkitaan esimerkiksi tapaus $A = q_i$. Sijoittamalla se ja sulkusuureen määritelmä (409) liikeyhtälöön (418) saadaan

$$\dot{q}_i = - \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_i}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial q_i}{\partial t}. \quad (419)$$

Koska riippumattomat muuttujat ovat $q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n$ ja t , saadaan

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} = 0, \quad (420)$$

joten jäljelle jää vain

$$\dot{q}_i = \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta_{ij} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (421)$$

mikä on sama kuin (382). Vastaavasti sijoittamalla $A = p_i$ saadaan (383).

Liikeyhtälöstä

$$\frac{dA}{dt} = -[H, A]_{\text{PB}} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (418)$$

saadaan vielä uusi muoto säilymislaeille: Suure A on liikevakio jos 1) se ei riipu eksplisiittisesti ajasta ($\partial A/\partial t = 0$) ja 2) sen Poissonin sulkusuure Hamiltonin funktion kanssa häviää ($[H, A]_{\text{PB}} = 0$). Totea harjoituksena, että tämä sisältää erikoistapauksena molemmat edellä tarkastellut säilymislait (Hamiltonin funktion sekä syklistä koordinaattia vastaavan liikemäärän säilymislain).

Tutkitaan vielä kanonisten muuttujien (p_i, q_i) välisiä sulkusuureita. Sijoittamalla määritelmään (409) saadaan

$$\begin{aligned} [p_i, q_j]_{\text{PB}} &= \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) \\ &= - \sum_k \delta_{ik} \delta_{jk} = -\delta_{ij} \end{aligned} \quad (422)$$

siis

$$[p_i, q_j]_{\text{PB}} = -\delta_{ij}. \quad (423)$$

Samalla tavalla nähdään, että

$$[p_i, p_j]_{\text{PB}} = 0, \quad [q_i, q_j]_{\text{PB}} = 0. \quad (424)$$

Harjoitustehtävänä todetaan kulmaliikemäärän komponenteille $L_i = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_i$ sekä kokonaiskulmaliikemäärän nelölle $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ seuraavat Poissonin sulkusuureet

$$[L_i, L_j]_{\text{PB}} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} L_k \quad (425)$$

$$[L^2, L_i]_{\text{PB}} = 0, \quad (426)$$

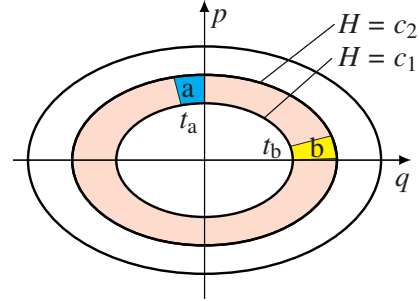
missä ε_{ijk} on permutaatioisymboli

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{kun } ijk = 123, 312 \text{ tai } 231 \\ -1 & \text{kun } ijk = 132, 321 \text{ tai } 213 \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases} \quad (427)$$

8.6 Liouville'n lause

Koordinaattien q_i muodostamaa (n -ulotteista) avaruutta on edellä kutsuttu konfiguraatioavaruudeksi. Piste tässä avaruudessa määrää kaikkien hiukkasten paikat tietyllä ajanhetkellä t , mutta ei kerro mitään niiden liikkeestä. Jotta systeemin tila tulisi täydellisesti määrättyä, on tiedettävä myös joko kaikki yleistetyt nopeudet \dot{q}_i tai vaihtoehtoisesti kaikki yleistetyt liikemäärät p_i . Jälkimmäinen valinta tarjoaa selviä etuja, joita seuraavassa tutkitaan.

Koordinaattien q_i ja p_i muodostamaa $2n$ -ulotteista avaruutta kutsutaan Hamiltonin faasiavaruudeksi, tai vain faasiavaruudeksi. Oheinen kuva esittää yksinkertaisen harmonisen oskillaattorin faasiavaruutta.



Piste (q_i^0, p_i^0) faasiavaruudessa antaa alkuehdot, ja liikeyhtälöt (382) ja (383) määräävät yksikäsitteisesti koko aikakehityksen, jota vastaa pisteiden $(q_i(t), p_i(t))$ muodostama polku kun t muuttuu. Jos Hamiltonin funktio on liikevakio, tapahtuu liike $2n - 1$ ulotteisella hyperpinnalla, jolla $H = \text{vakio}$.

Oletetaan nyt, että faasiavaruuden dimensio on suuri, esimerkiksi $n = 10 \dots 10^{23}$, missä jälkimmäinen arvo tulee Avogadron luvusta. Tällöin ei ole mahdollista tietää kaikkia alkuarvoja $(q_i(t_0), p_i(t_0))$ ajanhetkellä t_0 . Sen sijaan on mahdollista, että meillä on jokin käsitys siitä millä todennäköisyydellä tietyt alkuarvot esiintyvät.

Tutkitaan pisteen (q_i^0, p_i^0) kohdalla olevaa infinitesimaalisen pientä tilavuutta, esim. $q_i^0 < q_i < q_i^0 + dq_i^0$ ja $p_i^0 < p_i < p_i^0 + dp_i^0$. Tämän $2n$ -ulotteisen laatikon tilavuus $dV^0 = dq_1^0 \dots dq_n^0 dp_1^0 \dots dp_n^0$. Todennäköisyys dP , jolla alkuarvo on tämän tilavuuden sisällä, voidaan kirjoittaa

$$dP = \rho_0(\{q_i^0\}, \{p_i^0\}) dV^0, \quad (428)$$

missä ρ_0 on todennäköisyystiheys.

Oletetaan nyt, että tunnemme alkuarvojen todennäköisyystiheyden $\rho_0(\{q_i^0\}, \{p_i^0\})$. Seuraavaksi voimme kysyä mikä on todennäköisyystiheys $\rho(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$ mielivaltaisella ajanhetkellä t . Toisin sanoen, haluamme tietää todennäköisyyden dP , jolla systeemin koordinaatit ovat pisteen (q_i, p_i) kohdalla olevassa dV suuruisessa laatikossa. Tällöin

$$\rho(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \frac{dP}{dV}. \quad (429)$$

Liouville'n lause antaa tähän varsin yksinkertaisen vastauksen: todennäköisyystiheyden muutos aiheutuu ainoastaan siitä, että pisteet liikkuvat faasiavaruudessa ajan mukana

$$\rho(\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}, t) \equiv \rho_0(\{q_i^0\}, \{p_i^0\}). \quad (430)$$

Tätä kaavaa käyttäen siis saadaan todennäköisyystiheys laskettua kaikilla t jos vain liikeyhtälöiden ratkaisut $[q_i(t), p_i(t)]$ ovat tiedossa.

Ennen kuin todistetaan Liouville'n lause, tarkastellaan sen eri muotoja. Liouville'n lause voidaan esittää myös muodossa

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (431)$$

mikä seuraa yksinkertaisesti derivoimalla edellistä muotoa (430), missä oikea puoli on ajasta riippumaton. [Huom: kaava (431) sanoo, että ρ on vakio pitkin hiukkasen rataa (kokonaisderivaatta $d\rho/dt = 0$), mutta osittaisderivaatta $\partial\rho/\partial t$ voi hyvinkin olla nollasta poikkeava. Esimerkkinä tästä on jakauma, jonka tiheys ajan hetkellä t_a on nollasta poikkeava vain edellä olevan kuvan alueella a .]

Lauseelle saadaan myös geometrinen tulkinta faasiavaruudessa. Tarkastellaan esim. edellistä kuvaa. Tutkitaan niiden pisteiden joukkoa jotka ajanhetkellä t_a ovat alueella a (sininen). Koska koordinaatit $[q_i(t_a), p_i(t_a)]$ yksikäsitteisesti määräävät aikakehityksen $[q_i(t), p_i(t)]$, nämä pisteet kuvautuvat ajanhetkellä t jollekin tarkkaan määrättylle alueelle. Kuvassa on merkitty b :llä (keltaisella) sitä aluetta minne ne ovat kulkeutuneet ajanhetkellä t_b . Koska pisteiden määrä on säilynyt kuvauksessa muuttumattomana, pätee $P_{\text{keltainen}}(t_b) = P_{\text{sininen}}(t_a)$. Liouville'n lauseen (430) mukaan ovat todennäköisyystiheydet näillä alueilla samat. Silloin seuraa kaavasta (429), että myös näiden alueiden ($2n$ -ulotteiset) tilavuudet V ovat samat. Siis liike faasiavaruudessa tapahtuu siten, että tilavuus säilyy.

Tilavuuden säilymistä faasiavaruudessa voi suoraan soveltaa mm. kun pyritään fokuoimaan hiukkasvirta johonkin tiettyyn pisteeseen. Lauseesta seuraa tällöin, että jakautuma liikemääräavaruudessa välttämättä levenee.

Huomaa, että Liouville'n lause ei ole voimassa esimerkiksi muuttujien q_i ja \dot{q}_i muodostamassa avaruudessa. Siksi tilastollinen mekaniikka kannattaa aina formuloida käyttäen kanonisia muuttujia q_i ja p_i . Liouville'n lauseesta seuraa mm. että järkevä kuvaus tasapainotilalle saadaan siten, että todennäköisyystiheys on jokin liikevakioiden funktio. Liikevakioista usein oleellinen on vain energia, jolloin

$$\rho(\{q_i\}, \{p_i\}) = f(H(\{q_i\}, \{p_i\})). \quad (432)$$

[Tämä siis toteuttaa Liouville'n ehdon (431) kun Hamiltonin funktio H on säilyvä suure, ja antaa täysin ajasta riippumattoman jakautuman, niin kuin tasapainotilalle kuuluu.] Tilastollisessa mekaniikassa usein esiintyy, että f on joko deltafunktio [$f(H) = \alpha\delta(H - E)$], "mikrokanoninen joukko" tai eksponenttifunktio [$f(H) = \alpha \exp(-\beta H)$], "kanoninen joukko". (Tässä α ja β ovat vakiota.)

Jatkuvuusyhtälö

Ennen Liouville'n lauseen todistamista johdetaan yleinen *jatkuvuusyhtälö*, joka pätee tavallisille hiukkasille normaalissa \mathbf{r} -avaruudessa. Tutkitaan yksinkertaisuuden vuoksi

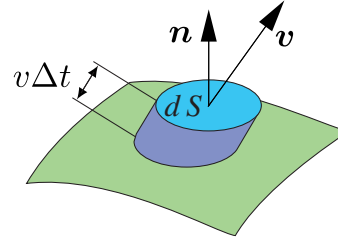
kolmiulotteista avaruutta, vaikka todistus on riippumaton avaruuden dimensiosta. Tarkastellaan jatkuvasti jakautunutta massaa, jota kuvaa tiheys $\rho(\mathbf{r}, t)$. Merkitään V :llä jotain osaa avaruudesta, joka ei riipu ajasta. Tämän alueen sisällä olevalle massalle saadaan

$$M_V(t) = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}, t). \quad (433)$$

Lasketaan nyt massan $M_V(t)$ aikaderivaatta:

$$\frac{dM_V(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}, t) = \int_V d^3r \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (434)$$

missä derivaatan ottaminen integraalin sisään on sallittua koska integrointialue on vakio. Toisaalta massan muutos täytyy aiheutua siitä, että massaa virtaa alueelle V ja pois sieltä. Pinta-alelementin dS läpi virtaa ajassa Δt massa $\rho dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t$. Tässä \mathbf{v} on nopeus ja \mathbf{n} on pinnan normaali, joka osoittaa alueesta V poispäin.



Määrittelemällä $dS = \mathbf{n} dS$, voidaan virrannut massa kirjoittaa $\rho dS \cdot \mathbf{v} \Delta t$. Koko pinnan läpi virrannut massa saadaan pintaintegraalina alueen V sulkevan pinnan S yli:

$$\frac{dM_V(t)}{dt} = - \int_S dS \cdot \rho \mathbf{v}. \quad (435)$$

Pintaintegraali (435) voidaan tuttuja vektorirelaatioita käyttäen muuttaa tilavuusintegraaliksi

$$- \int_S dS \cdot \rho \mathbf{v} = - \int_V d^3r \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}). \quad (436)$$

Kaavoista (434)–(436) saadaan

$$\int_V d^3r \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] = 0. \quad (437)$$

Koska alue V on mielivaltainen, täytyy integrandin olla nolla kaikkialla. Tämä antaa jatkuvuusyhtälön

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (438)$$

Jatkuvuusyhtälö voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (439)$$

Jatkuvuusyhtälö faasiavaruudessa

Sovelletaan jatkuvuusyhtälöä koordinaattien q_i ja p_i muodostamaan $2n$ -ulotteiseen faasiavaruuteen. Tällöin

$\rho(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$, $\mathbf{v} \rightarrow (\{\dot{q}_i\}, \{\dot{p}_i\})$, $\nabla \rightarrow (\{\frac{\partial}{\partial q_i}\}, \{\frac{\partial}{\partial p_i}\})$ ja

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &\rightarrow \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0, \end{aligned} \quad (440)$$

missä olemme käyttäneet Hamiltonin liikeyhtälöitä

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (382)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (383)$$

Koska siis $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, saadaan jatkuvuusyhtälöstä (439) Liouvilin lause (431).

9. Monta tietä kvanttimekaniikkaan

Edellisissä luvuissa on tutustuttu *klassiseen mekaniikkaan*. Klassisen mekaniikan tulokset ovat hyvin tarkasti yhtäpitäviä mittausten kanssa monissa tapauksissa. On kuitenkin osoittautunut, että klassinen mekaniikka ei anna oikeita (= mitattuja) tuloksia, kun sitä sovelletaan atomitason ilmiöihin, esimerkiksi elektronien liikkeeseen atomeissa. Pitkällisten tutkimusten tuloksena on päädytty siihen, että on muodostettava yleisempi teoria, jota kutsutaan *kvanttimekaniikaksi*.

Kvanttimekaniikka antaa erilaiset tulokset kuin klassisen mekaniikka, kun sitä sovelletaan atomaarisiin ilmiöihin. Kun kvanttimekaniikkaa sovelletaan makroskooppisiin kappaleisiin, osoittautuu, että se antaa suurella tarkkuudella samat tulokset kuin klassinen mekaniikka. Koska kvanttimekaniikka on monimutkaisempi teoria kuin klassinen mekaniikka, kannattaa makroskooppisissa ongelmissa aina käyttää klassista mekaniikkaa.

Kokeelliset perustelut ja tarkempi johdanto kvanttimekaniikkaan esitetään muissa kursseissa. Tässä kurssissa hypätään suoraan siihen, miten klassista mekaniikkaa tulee yleistää, että saataisiin kvanttimekaniikka.

Osoittautuu, että tämä voidaan tehdä monella eri tavalla. Tässä hahmotellaan kolme eri tapaa, joista kuulija voi vapaasti valita mieluisensa. Kaikki kolme tapaa johtavat lopulta samaan kvanttimekaniikan teoriaan. Tässä ei kuitenkaan mennä niin pitkälle, että näiden tapojen yhtäpitävyyttä voitaisiin osoittaa.

9.1 Heisenbergin kuva

Yksi tapa siirtyä kvanttimekaniikkaan on lähteä Hamiltonin mekaniikasta. Poissonin sulkuosuudet korvataan seuraavasti:

$$[A, B]_{\text{PB}} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [\check{A}, \check{B}]. \quad (441)$$

Tässä i on imaginaariyksikkö, $\hbar = h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34}$ Js on Planckin vakio, ja $[\check{A}, \check{B}]$ on *kommutaattori*:

$$[\check{A}, \check{B}] \equiv \check{A}\check{B} - \check{B}\check{A}. \quad (442)$$

Samalla suureiden A ja B luonne on muuttunut, jonka takia olemme kirjoittaneet niiden sijasta \check{A} ja \check{B} . Hamiltonin mekaniikassa A ja B ovat funktioita: $A(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$. Näille suoraan laskettuna kommutaattori $[A, B]$ häviää aina: $[A, B] \equiv 0$. Jotta kommutaattori (442) olisi nollasta poikkeava, on \check{A} ja \check{B} ymmärrettävä joko matriiseiksi tai (yleisemmin) operaattoreiksi.

Sovelletaan korvausta (441) kanonisten muuttujien Poissonin sulkuosuuseeseen

$$[p_i, q_j]_{\text{PB}} = -\delta_{ij}. \quad (423)$$

Saadaan

$$[\check{p}_i, \check{q}_j] = -i\hbar\delta_{ij}. \quad (443)$$

Kaavoista (424) saadaan lisäksi

$$[\check{p}_i, \check{p}_j] = 0, \quad [\check{q}_i, \check{q}_j] = 0. \quad (444)$$

Nähdään siis, että \check{p}_i ja \check{q}_j eivät kommutoi (siis niiden kommutaattori ei ole nolla). Tämä on perustavin ero klassisen ja kvanttimekaniikan välillä. Ihmisen mittakaavasta katsottuna Planckin vakio on hyvin pieni. Silloin voidaan kommutaattoria (443) suurella tarkkuudella approksimoida

$$[\check{p}_i, \check{q}_j] \approx 0, \quad (445)$$

jolloin kvanttimekaniikka redusoituu klassiseen mekaniikkaan. Atomien tasolla \hbar on kuitenkin merkittävä, ja kvanttimekaniikka johtaa eri tuloksiin kuin klassinen mekaniikka.

Kun sovelletaan korvausta (423) liikeyhtälöön (418) saadaan

$$\frac{d\check{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\check{H}, \check{A}] + \frac{\partial \check{A}}{\partial t}. \quad (446)$$

Tämä on kvanttimekaniikan liikeyhtälö lausuttuna *Heisenbergin kuvassa*.

Siirryttäessä klassisesta mekaniikasta kvanttimekaniikkaan edellä kuvatulla tavalla syntyy ongelma siitä mitä tarkoitetaan esim. yleistetyin liikemäärän \check{p}_i mittaamisella, kun se ei olekaan reaalin luku vaan jokin abstrakti operaattori. Jätetään tämän kysymyksen käsittely kuitenkin kvanttimekaniikan kursseihin.

9.2 Schrödingerin kuva

Heisenbergin kuva tarjoaa suoran siirtymisen klassisesta mekaniikasta kvanttimekaniikkaan. Heisenbergin kuva on kuitenkin varsin abstrakti. Sen takia lähes kaikissa oppikirjoissa kvanttimekaniikka esitetään ensin käyttäen yksinkertaisempaa *Schrödingerin kuvaa*.

Lähdetään yksityiskohtaisesti konstruoimaan operaattorit \check{p}_i ja \check{q}_i . Rajoitutaan yksinkertaisuuden vuoksi yhteen ulottuvuuteen, jossa q on sama kuin paikkakoordinaatti x . Tällöin (443) on

$$[\check{p}, \check{x}] \equiv \check{p}\check{x} - \check{x}\check{p} = -i\hbar. \quad (447)$$

Tämä kommutaattori voidaan toteuttaa siten, että otetaan käyttöön mielivaltainen (kompleksiarvoinen) funktio $f(x)$. Määritellään \check{x} sellaisena operaattorina, että kun sillä operaoidaan funktioon $f(x)$, se antaa funktion $xf(x)$, siis alkuperäisen funktion kerrottuna argumentillään. Tätä voidaan merkitä

$$\check{x} : f(x) \rightarrow xf(x). \quad (448)$$

Määritellään \check{p} derivaattaoperaattorina (sopivalla vakiolla kerrottuna):

$$\check{p} : f(x) \rightarrow -i\hbar \frac{df}{dx}(x). \quad (449)$$

Näiden kommutaattori on myös operaattori. Lasketaan mitä se tekee funktiolle $f(x)$

$$[\check{p}, \check{x}] : f(x) \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx} [xf(x)] - x \left[-i\hbar \frac{d}{dx} f(x) \right]. \quad (450)$$

Käyttäen tulon derivointisääntöä huomataan, että termit joissa esiintyy f :n derivaatta kumoutuvat, ja saadaan

$$[\check{p}, \check{x}] : f(x) \rightarrow -i\hbar f(x). \quad (451)$$

Koska tämä pätee mielivaltaiselle $f(x)$, todetaan, että operaattori $[\check{p}, \check{x}]$ on sama kuin kertominen vakiolla $-i\hbar$. Yhtälö (447) on näin saatu toteutettua operaattoreiden (448) ja (449) avulla.

Oletetaan yhdessä ulottuvuudessa Hamiltonin funktio

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (452)$$

Kvanttimekaniikassa x ja p korvataan operaattoreilla \check{x} ja \check{p} . Tällöin myös Hamiltonin funktio muuttuu operaattoriksi:

$$\check{H} = \frac{\check{p}^2}{2m} + V(\check{x}), \quad (453)$$

mistä seuraa

$$\begin{aligned} \check{H} : f(x) &\rightarrow \left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right)^2 + V(x) \right] f(x) \\ &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) f(x). \end{aligned} \quad (454)$$

Schrödingerin kuvassa kirjoitetaan liikeyhtälö

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \check{H} \Psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi(x, t). \quad (455)$$

Tämä on *Schrödingerin yhtälö* ja funktiota $\Psi(x, t)$ kutsutaan *aaltofunktioksi*. Schrödingerin yhtälö muistuttaa josain määrin Heisenbergin kuvan liikeyhtälöä (446), mutta ei ole sama. Tämä johtuu siitä, että Schrödingerin kuvassa kaikki aikariippuvuus on aaltofunktiossa $\Psi(x, t)$, ja operaattorit \check{x} ja \check{p} ovat ajasta riippumattomia. Heisenbergin kuvassa (joka on lähempänä klassisen mekaniikan kuvaa) operaattorit \check{x} ja \check{p} riippuvat ajasta. Näiden kuvien yhtäpitävyys selvitetään kvanttimekaniikan pidemmälle menevissä kursseissa.

9.3 Polkuintegraali

Edellä osoitimme, että mekaniikan voi johtaa lähtien Hamiltonin periaatteesta. Siinä tutkittiin vaikutusfunktionaalina

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(q, \dot{q}; t) dt, \quad (120)$$

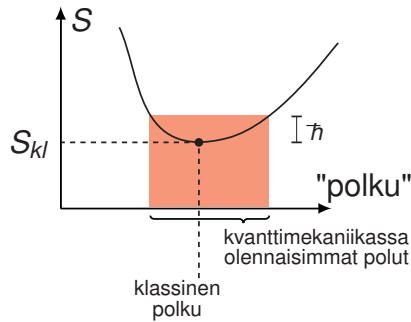
missä systeemi ajanhetkellä t_a on pisteessä q_a ja ajanhetkellä t_b pisteessä q_b . (Rajoitutaan yksinkertaisuuden vuoksi taas yhteen ulottuvuuteen.) Vaikutus S siten riippuu siitä polusta $q(t)$, jota pitkin kuljetaan näiden pisteiden välillä. Hamiltonin periaate sanoo, että näistä poluista vain se on fyysikaalinen, joka antaa S :lle ääriarvon S_{kl} . Tätä kutsutaan jatkossa klassiseksi poluksi.

Tästä voi siirtyä kvanttimekaniikkaan seuraavalla tavalla. Sen sijaan että tulkitaan fyysikaaliseksi vain ääriarvon antava polku, sanotaankin, että kaikki polut todella ovat hiukkasen mahdollisia reittejä. Kaikki polut yhdessä muodostavat amplitudin A , joka on

$$A(q_a, t_a; q_b, t_b) = \sum_p \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right). \quad (456)$$

Tässä \sum_p tarkoittaa summaa yli kaikkien polkujen. Polut muodostavat jatkumon, joten oikeastaan kyse on *integraalista yli polkujen*, tai lyhyemmin *polkuintegraalista*. Emme ryhdy sen täsmälliseen määrittelyyn, vaan tyydymme tässä kvalitatiivisiin tarkasteluihin.

Vaikutus S on yleisesti erisuuri eri poluilla. Koska $\exp(iS/\hbar) = \cos(S/\hbar) + i\sin(S/\hbar)$ on oskilloiva funktio, syntyy interferenssiä. Polut joilla $\exp(iS/\hbar)$:llä on eri merkki vaimentavat toisiaan summassa \sum_p . Sellaiset polut joilla $S - S_{kl}$ on paljon suurempi kuin \hbar , kumoavat toistensa kontribuution A :han lähes täysin. Toisaalta lähellä klassista polkua olevat polut, joilla $S - S_{kl}$ on pienempi kuin \hbar , interferoivat konstruktivisesti, ja tekevät suhteessa suuren kontribuution A :han. Siksi ne esiintyvät todennäköisimpinä hiukkasen reiteinä.



Tarkempi tutkiskelu osoittaa, että A on hyvin läheistä sukua aaltofunktiolle Ψ , ja että polkuintegraalista saatu teoria on ekvivalentti Schrödingerin yhtälön (455) kanssa. [Katso Feynman & Hibbs: Quantum mechanics and path integrals, 1965].

Polkuintegraalit ovat varsin käteviä useissa kvanttimekaniikan laskuissa. Niiden matematiikka on kuitenkin hankalampaa kuin Schrödingerin yhtälössä, ja siksi niitä harvemmin esitetään kvanttimekaniikan kursseilla.

10. Lopuksi

Tämä päättää analyttisen mekaniikan kurssin. Keskeisimmät asiat ovat olleet Lagrangen mekaniikka (luku 3), variaatioperiaate (luku 4) ja Hamiltonin mekaniikka (luku 8). Lukekaa ne huolellisesti. Luvut 5-7 esittävät Lagrangen mekaniikan sovellutuksia. Niiden tarkoituksena on ollut havainnollistaa teorian käyttöä eri yhteyksissä, ja samalla oppia hyödyllisiä apuneuvoja eri tarkoituksiin. Nämä kappaleet on hyvä osata, mutta erityisesti luvun 7 yksityiskohdienten muistaminen ei ole yhtä olennaista kuin luvuissa 3, 4 ja 8. Luvun 9 ja osion 8.6 tarkoitus on ollut liittää kurssi paremmin muihin opintoihin. Niistäkin saattaa tulla jotain tenttiin. Kerratkaa myös laskuharjoitukset.

Liite

Tässä lyhyt kertaus vektorilaskennasta, derivoinnista ja integroinnista. Lue tarkemmin Fysiikan matematiikkaa -kurssista.

Vektorilasku

Skalaarilla tarkoitetaan reaali- tai kompleksilukua. Vektorilla tarkoitetaan kolmiulotteisen avaruuden vektoreita. Kirjoitamme vektorin komponentteihin $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$ ortonormeeratussa kannassa $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$. Vektoreille määritellään skalaarilla w kertominen $w\mathbf{A}$ ja yhteenlasku $\mathbf{A} + \mathbf{B}$,

$$w\mathbf{A} = wA_x\hat{\mathbf{x}} + wA_y\hat{\mathbf{y}} + wA_z\hat{\mathbf{z}} \quad (457)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}}. \quad (458)$$

Kahden vektorin skalaaritulo määritellään

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \quad (459)$$

Erikoistapauksena tästä määritellään vektorin neliö

$$A^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (460)$$

ja vektorin pituus $A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$. Ristitulo määritellään

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{x}} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{\mathbf{y}} \\ &\quad + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (461)$$

Vektorikolmitulolle näistä saadaan laskemalla kaavat

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (462)$$

Derivointi

Tarkastellaan aluksi reaaliarvoista (tai kompleksiarvoista) yhden muuttujan funktiota

$$f(x), \quad (463)$$

jossa muuttujana on x . Funktiolle f määritellään derivaatafunktioksi df/dx . Sen arvo pisteessä x määritellään raja-arvona

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \quad (464)$$

minkä oletetaan olevan olemassa. Voidaan muodostaa myös korkeampia derivaattoja

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right). \quad (465)$$

Jos on derivoitavana kahden funktion $f(x)$ ja $g(x)$ summa $f(x) + g(x)$, voidaan derivoinnin ja summauksen järjestys vaihtaa,

$$\frac{d(f + g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}. \quad (466)$$

Jos on derivoitavana kahden funktion $f(x)$ ja $g(x)$ tulo $f(x)g(x)$, voidaan se laskea *tulon derivointisäännöllä*

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}. \quad (467)$$

Tarkastellaan sitten reaaliarvoista (tai kompleksiarvoista) useamman muuttujan funktiota

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (468)$$

joka riippuu muuttujista x_1, x_2, \dots, x_n . Määritellään osittaisderivaatat

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial w}{\partial x_n}. \quad (469)$$

Näissä derivointi suoritetaan kulloinkin vain yhden muuttujan suhteen, pitäen muita funktion muuttujalistassa (468) mainittuja muuttujia vakiona. Osittaisderivoinnille pätevät vastaavat summan ja tulon derivointisäännöt kuin kokonaisderivaatalle:

$$\frac{\partial(f + g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (470)$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}g + f\frac{\partial g}{\partial x_i}. \quad (471)$$

Voidaan muodostaa myös korkeampia osittaisderivaattoja, esim.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (472)$$

missä i ja $j = 1, 2, \dots, n$. Voidaan osoittaa että osittaisderivointien järjestys voidaan vaihtaa,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i}. \quad (473)$$

Oletetaan että muuttujat x_1, x_2, \dots, x_n riippuvat jollain tavalla uudesta muuttujasta t , mikä riippuvuus ilmaistaan funktiolla $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Nyt voidaan w :stä muodostaa muuttujan t funktio, jota merkitään

$$f(t) = w(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \quad (474)$$

Derivoitaessa tätä t :n suhteen pätee

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}, \end{aligned} \quad (475)$$

mikä tunnetaan derivoinnin *ketjusääntönä*.

Vektorit ja derivointi

Tarkastellaan skalaarifunktiota $w(\mathbf{r})$ joka riippuu vektorista $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$. Tässä funktio voidaan kirjoittaa myös muuttujien x, y ja z funktiona, siis $w(x, y, z)$. Määritellään vektorikenttä $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektoriksi \mathbf{A} joka riippuu paikasta \mathbf{r} . Vektorikenttä voidaan myös esittää komponentteittain $A_x(x, y, z), A_y(x, y, z)$ ja $A_z(x, y, z)$, jotka siis kaikki ovat x :n, y :n ja z :n funktioita.

Määritellään *nabla*-operaattori ∇ kaavalla

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (476)$$

Tämän avulla määritellään skalaarifunktion $w(x, y, z)$ *gradientti*

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial w}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial w}{\partial z} \hat{z}. \quad (477)$$

Skalaarifunktion gradientti on vektorikenttä.

Nablan avulla voidaan muodostaa myös operaattori

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (478)$$

Tämän avulla voidaan muodostaa *suunnattu derivaatta*. Skalaarifunktiolle w se on

$$\mathbf{A} \cdot \nabla w = A_x \frac{\partial w}{\partial x} + A_y \frac{\partial w}{\partial y} + A_z \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (479)$$

mikä on skalaarikenttä. Vektorikentälle \mathbf{B} se on

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} = A_x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}, \quad (480)$$

mikä on vektorikenttä.

Nablan avulla voidaan vektorifunktiolle $\mathbf{A}(x, y, z)$ määritellä *divergenssi*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (481)$$

mikä on skalaarikenttä, ja *roottori*

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{y} \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}, \end{aligned} \quad (482)$$

mikä on vektorikenttä.

Nablaa voidaan käsitellä kuin tavallista vektoria, kun vain lisäksi otetaan huomioon sen operaattoriluonne. Esimerkiksi kaavoissa (462) voi joku tai useampi vektoreista \mathbf{A} , \mathbf{B} tai \mathbf{C} olla ∇ , mutta tällöin on tarkistettava että derivoinnit kaavan molemmilla puolilla kohdistuvat samoihin suureisiin. Jos näin ei automaattisesti ole, on tekijöiden järjestystä muutettava vastaavasti. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{C}) &= \\ A_x \nabla C_x + A_y \nabla C_y + A_z \nabla C_z - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (483)$$

Voidaan osoittaa seuraavat tulokset. 1) Jos vektorikentän $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ roottori häviää,

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (484)$$

niin voidaan löytää skalaarikenttä $\Phi(\mathbf{r})$ niin että

$$\mathbf{B} = \nabla \Phi. \quad (485)$$

2) Jos vektorikentän $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ divergenssi häviää,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (486)$$

niin voidaan löytää vektorikenttä $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ niin että

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (487)$$

Vektorit ja integrointi

Vektorifunktiolle $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ määritellään integrointeja, jotka voidaan palauttaa skalaarifunktioiden integroinneiksi. Olkoon l polku, jota kuvaa paikkavektorin riippuvuus $\mathbf{r}(u)$ reaaliarvoisesta muuttujasta u . Määritellään *viivaintegraali*

$$\int_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{u_1}^{u_2} \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} du, \quad (488)$$

missä jälkimmäinen muoto on tavallinen integraali. Integrointirajat valitaan niin että $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(u_1)$ on polun l alkupiste ja $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(u_2)$ loppupiste. Huomaa että $d\mathbf{r}/du$ polun tangentin $\hat{\mathbf{t}}$ suuntainen. (Hattu tarkoittaa että $\hat{\mathbf{t}}$ on yksikkövektori, $|\hat{\mathbf{t}}| = 1$.) Voidaan tulkita että $d\mathbf{r}$ on vektori, jonka suunta on $\hat{\mathbf{t}}$ ja pituus sama kuin polkuelementin pituus dr , siis $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{t}} dr$.

Olkoon S pinta, jota kuvaa riippuvuus $\mathbf{r}(u, v)$ kahdesta reaaliarvoisesta muuttujasta u ja v . Määritellään *pintaintegraali*

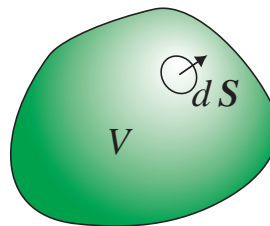
$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \int \mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv. \quad (489)$$

Yhtälön oikealla puolella on skalaarifunktion kaksiulotteinen integraali. Integrointi u - v -tasossa tulee rajoittaa niin että pinta S tulee kertaalleen käytyä läpi. Huomaa että vektori $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ on pinnan normaalin $\hat{\mathbf{n}}$ suuntainen. Voidaan tulkita että $d\mathbf{S}$ on vektori, jonka suunta on $\hat{\mathbf{n}}$ ja pituus sama kuin pintaelementin ala dS , siis $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$.

Gaussin lause sanoo

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV, \quad (490)$$

missä S on pinta joka rajoittaa tilavuutta V . Tässä $d\mathbf{S}$ osoittaa V :stä ulospäin.



Stokesin lause sanoo

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (491)$$

missä polku l on reunakäyrä pinnalle S . Integrointipolku on positiiviseen kiertosuuntaan $d\mathbf{S}$:n ympäri.

